7.1. 1) Докажите, что в конечномерном векторном пространстве над $\mathbb{R}$ любые два непересекающихся выпуклых множества разделены гиперплоскостью.
2) Приведите пример двух замкнутых выпуклых непересекающихся подмножеств в $\mathbb{R}^2$, не разделенных гиперплоскостью строго.

7.2. Приведите пример двух непересекающихся выпуклых подмножеств в каком-либо вещественном векторном пространстве, не разделенных гиперплоскостью.

7.3-b. Приведите пример двух непересекающихся замкнутых выпуклых подмножеств в вещественном гильбертовом пространстве ℓ^2, не разделенных замкнутой гиперплоскостью.

Определение 7.1. Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $S \subseteq X$. Назовем точку $x \in S$ *линейно внутренней* для S, если множество $S - x$ поглощающее. Назовем S *линейно открытым*, если все его точки линейно внутренние.

7.4. 1) Докажите, что семейство всех линейно открытых множеств в произвольном векторном пространстве X задает топологию на X.
2) Докажите, что топология из п. 1 не слабее топологии, порожденной любой нормой на X.
3) Докажите, что если $\dim X > 1$, то операция сложения в топологии из п. 1 не является непрерывной и, следовательно, эта топология строго сильнее, чем топология, порожденная любой нормой на X.

7.5. Докажите следующую разновидность теоремы об отделении выпуклых множеств (ср. теорему с лекции): если X — векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $A, B \subset X$ — выпуклые непересекающиеся множества, причем линейная внутренность одного из них непуста, то A и B разделены гиперплоскостью.

7.6. Выведите теорему Хана–Банаха из теоремы, сформулированной в предыдущей задаче.

7.7-b (*теорема Хелли*)**.** Пусть дано семейство выпуклых компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$, любые $n+1$ из которых имеют непустое пересечение. Докажите, что тогда и все семейство имеет непустое пересечение.

Указание. Сведите утверждение к случаю, когда семейство конечно. Если оно содержит $N = n+2$ множества, то проведите индукцию по n и воспользуйтесь теоремой об отделении выпуклых множеств. Если оно содержит $N > n+2$ множеств, проведите индукцию по N.

Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $S \subseteq X$ — выпуклое множество и $f_0, \ldots, f_n$ — выпуклые функции на S. *Задачей выпуклого программирования* называется задача отыскания минимума f_0 на множестве $S \cap \{x : f_i(x) \leqslant 0 \ \forall i = 1, \ldots, n\}$. *Функцией Лагранжа* этой задачи называется функция $\mathscr{L} \colon S \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(x)$.

7.8-b (*теорема Куна–Таккера*)**.** Пусть $x_0 \in S$ — решение описанной выше задачи выпуклого программирования. Докажите, что существует такое $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (набор *множителей Лагранжа*), $\lambda \neq 0$, что

1) $\lambda_i \geqslant 0$ для всех $i = 0, \ldots, n$;
2) $\lambda_i f_i(x) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$;
3) (x_0, λ) — точка минимума $\mathscr{L}$ на S.

7.9-b (*теорема о минимаксе*)**.** Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые выпуклые компакты (множества стратегий двух игроков), и пусть $\varphi \colon A \times B \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, выпуклая по первому аргументу и вогнутая по второму (функция платы — сумма, которую заплатит 2-й игрок 1-му, если 1-й будет играть по стратегии x, а 2-й — по стратегии y). Докажите, что существует $(x_0, y_0) \in A \times B$ (оптимальная пара стратегий), для которой

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} \varphi(x, y).$$