Математические основы естествознания

Листок 3. Скалярное поле

Список 1. Задачи для обсуждения на семинаре

1. Рассмотрим действие

$$S = \frac{1}{2}\int\Big(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\Big)d^4x$$

для скалярного поля φ в пространстве Минковского с сигнатурой $(+1,-1,-1,-1)$ и координатами $x_0 = t$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. (Скорость света положена равной 1.)

   а) Написать уравнение движения поля φ.

   б) Найти его решение в виде плоской волны $\varphi = f(x - vt)$.

   в) Описать эволюцию во времени “волнового пакета т.е. возбуждения, в начальный момент локализованной в области $|x| < a$ (или быстро спадающего вне этой области). Чему равна скорость движения волнового пакета? Как будет меняться во времени его ширина?

2. Рассмотрим теорию вещественного скалярного поля φ в двумерном пространстве Минковского с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_t\varphi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_x\varphi\right)^2 - V(\varphi)$$

   а) Написать функции Лагранжа L и Гамильтона H для этого поля и показать, что обобщенный импульс есть $p(x) = \partial_t\varphi(x)$.

   б) Найти уравнение движения и показать, что оно является гамильтоновым с гамильтонианом H из пункта а), т.е. $\partial\varphi/\partial t = \{H,\varphi\}$, $\partial p/\partial t = \{H,p\}$, где p – обобщенный импульс из пункта а), а скобка Пуассона задается формулами $\{p(x),p(x')\} = \{\varphi(x),\varphi(x')\} = 0$, $\{p(x),\varphi(x')\} = \delta(x - x')$.

   в) Найти импульс P поля φ и показать, что он является интегралом движения, т.е. $dP/dt = \{H,P\} = 0$.

   г) Найти какое-нибудь точное решение уравнения движения вида $\varphi(x,t) = f(x - vt)$, не имеющее особенностей на действительной оси. Рассмотреть случаи $V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{g^2}{2}\varphi^4$ и $V(\varphi) = -\frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{g^2}{2}\varphi^4$.

   д) Вычислить энергию и импульс найденных в пункте г) решений.

3. Рассмотрим теорию скалярного поля φ в двумерном пространстве Минковского с сигнатурой $(+1,-1)$ и координатами $x_0 = t$ и $x_1 = x$, заданную действием

$$S = \int\left(\frac{1}{2}\,\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{m^2}{\beta^2}\Big(1-\cos(\beta\varphi)\Big)\right)d^2x$$

   а) Написать уравнение движения поля $\varphi = \varphi(x,t)$.

б) Найти какое-нибудь его точное решение вида $\varphi(x,t) = f(x - vt)$, не имеющее особенностей на действительной оси.

4. Пусть действие для релятивистской частицы, взаимодействующей с фиксированным скалярным полем φ имеет вид

$$S = -mc^2 \int ds + \lambda \int \varphi \, ds$$

где интегрирование производится вдоль мировой линии частицы, и λ – константа связи. Найти закон движения частицы.

Математические основы естествознания

Листок 3. Скалярное поле

Список 2. Задачи для письменного домашнего решения

Обязательные задачи: 1а, 1б, 2, 3а.

1. Рассмотрим действие

$$S = \frac{1}{2}\int \Big(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2\Big) d^2x$$

для вещественного скалярного поля φ в двумерном пространстве Минковского с сигнатурой $(+1, -1)$ и координатами $x_0 = t$, $x_1 = x$. (Скорость света положена равной 1.)

   а) Написать уравнение движения поля φ и найти его общее решение в виде интеграла Фурье.

   б) Выписать компоненты тензора энергии-импульса поля φ.

   в) Выразить энергию и импульс поля φ через коэффициенты Фурье, входящие в общее решение уравнения движения.

2. Действие для свободного комплексного скалярного поля φ в пространстве Минковского с сигнатурой $(+1, -1, -1, -1)$ имеет вид

$$S = \int \Big(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \bar{\varphi} - m^2 |\varphi|^2\Big) d^4x$$

Написать уравнение движения и найти его общее решение в виде интеграла Фурье. Сравнить с общим решением для вещественного свободного поля.

3. Рассмотрим теорию скалярного поля φ в двумерном пространстве Минковского с сигнатурой $(+1, -1)$ и координатами $x_0 = t$ и $x_1 = x$, заданную действием

$$S = \int \left(\frac{1}{2}\,\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{\beta^2}\Big(1 - \cos(\beta\varphi)\Big)\right) d^2x$$

   а) Найти точное решение уравнения движения для поля φ в виде “кинка”, сохраняющего свой профиль и движущегося с постоянной скоростью v, т.е. решение вида $\varphi(x,t) = f(x - vt)$, такое, что $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - f(-x)) = 2\pi/\beta$.

   б) Вычислить энергию и импульс поля для найденного в пункте а) решения. Сравнить с энергией и импульсом релятивистской частицы.

4. Действие для главного кирального поля в двумерном пространстве Минковского с сигнатурой $(+1, -1)$ и координатами $x_0 = t$ и $x_1 = x$ имеет вид

$$S = \int \mathrm{tr}\,(\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1})\, d^2x$$

Здесь $g(t,x) \in SL(N)$ – обратимая матрица, зависящая от точки пространства-времени, а tr – операция взятия следа. Написать уравнение движения поля.