Математические основы естествознания

Модуль 2. Задачи к экзамену

1. Рассмотрим теорию вещественного скалярного поля φ в двумерном пространстве Минковского с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}\,(\partial_x\varphi)^2 - V(\varphi)$$

   а) Написать функции Лагранжа L и Гамильтона H для этого поля и показать, что обобщенный импульс есть $p(x) = \partial_t\varphi(x)$.

   б) Найти импульс P поля φ и показать, что он является интегралом движения, т.е. $dP/dt = \{H, P\} = 0$.

2. а) Найти функционал действия, минимизация которого дает уравнение движения

$$\partial_t^2\varphi - \partial_x^2\varphi - m^2\varphi + 2g^2\varphi^3 = 0$$

   б) Найти точное решение этого уравнения вида $\varphi(x,t) = f(x - vt)$, не имеющее особенностей на действительной оси.

3. Найти запаздывающую функцию Грина для уравнения $(\partial_t^2 - \partial_x^2)\varphi = 0$ свободного безмассового скалярного поля в размерности $1+1$, т. е. функцию $G(x,t)$ такую, что $(\partial_t^2 - \partial_x^2)G(x,t) = \delta(t)\delta(x)$ и $G(x,t) = 0$ при $t < 0$.

4. Рассмотрим теорию скалярного поля φ в двумерном пространстве Минковского с сигнатурой $(+1,-1)$ и координатами $x_0 = t$ и $x_1 = x$, заданную действием

$$S = \int \left(\frac{1}{2}\,\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{\mu^2}{\beta^2}\,e^{\beta\varphi}\right) d^2x$$

   а) Написать уравнение движения поля $\varphi = \varphi(x,t)$.

   б) Выписать компоненты тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ поля φ, найти его след T^μ_μ и проверить его сохранение на уравнении движения.

   в) Найти решение уравнения движения вида $\varphi = f(x - vt)$.

   г) (Вопрос на 10 баллов) Можно ли найти общее решение? Если да, найти его.

5. Найти сохраняющиеся токи в модели с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\varphi}, \partial^\mu\vec{\varphi}) - V(|\vec{\varphi}|^2)$$

   где поле $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ – вектор в “изотопическом” пространстве $\mathbb{R}^3$. Скалярное произведение (,) в “изотопическом” пространстве имеет вид $(\vec{\varphi}, \vec{\phi}) = \varphi_1\phi_1 + \varphi_2\phi_2 + \varphi_3\phi_3$, $|\vec{\varphi}|^2 = (\varphi, \varphi)$.

6. Рассмотрим теорию векторного поля A_μ в пространстве-времени размерности $2+1$ с сигнатурой $(+1,-1,-1)$. Действие имеет вид

$$S = \int d^3x \, \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} = \pm 1$ – полностью антисимметричный единичный тензор (примем, что $\varepsilon^{012} = 1$). (Действие для поля A_μ такого вида называется действием Черна-Саймонса.)

а) Инвариантно ли действие относительно калибровочных преобразований поля A_μ?

б) Вывести уравнения движения.

в) Найти решение уравнений движения.

Задачи, подробное письменное решение любой из которых дает право на экзамен-автомат

1. Найти запаздывающую функцию Грина для уравнения $(\partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2)\varphi = 0$ свободного безмассового скалярного поля в размерности $2+1$, т. е. функцию $G(\vec{x}, t)$ такую, что $(\partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2)G(\vec{x}, t) = \delta(t)\delta^{(2)}(\vec{x})$ и $G(\vec{x}, t) = 0$ при $t < 0$.

2. Найти функционал действия, минимизация которого дает уравнение движения

$$\partial_{x_+}(g^{-1}\partial_{x_-} g) = 0$$

в координатах светового конуса $x_\pm = x \pm t$ для поля $g \in SL(N)$.