Математические основы естествознания

Листок 6. Криволинейные координаты, метрика, геодезические.

Обязательные задачи: 1а, 1б, 2а, 2б, 3а, 3б, 4а, 5а, 6

1. Введем полярные координаты r, φ на плоскости.

   а) Найти компоненты метрического тензора и символы Кристоффеля.

   б) Написать уравнение геодезических и убедиться, что его общим решением являются произвольные прямые на плоскости.

2. Введем сферические координаты θ, φ (широта и долгота) на 2-мерной сфере радиуса R.

   а) Найти компоненты метрического тензора и символы Кристоффеля.

   б) Описать все геодезические на 2-мерной сфере.

   в) Будем считать, что земная поверхность – сфера радиуса R. Чтобы изобразить ее на плоской карте с евклидовой метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$, нужно воспользоваться какой-либо проекцией. Рассмотрим цилиндрическую проекцию, т.е. проекцию со сферы радиуса R на цилиндр того же радиуса, в который эта сфера вложена, с помощью лучей, пущенных из центра сферы. Записать метрику земной поверхности в координатах x, y при цилиндрической проекции.

3. Внутри единичного круга $x^2 + y^2 < 1$ на плоскости со стандартными координатами x, y введем метрику

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

   (она называется метрикой Пуанкаре). Единичный круг с метрикой Пуанкаре $\mathbb{D}$ является одним из примеров гиперболической или неэвклидовой геометрии (моделью 2-мерного пространства Лобачевского).

   а) Найти символы Кристоффеля для пространства $\mathbb{D}$.

   б) Описать все геодезические в пространстве $\mathbb{D}$.

   в) Найти расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в метрике Пуанкаре.

   г) Выразить площадь треугольника в пространстве $\mathbb{D}$ в метрике Пуанкаре (стороны треугольника являются геодезическими) через сумму его внутренних углов.

4. Рассмотрим метрику

$$ds^2 = 2dx^2 + 2dy^2 + 6dz^2 + 6dxdz + 6dydz + 2dxdy$$

   в 3-мерном пространстве с координатами x, y, z.

   а) Показать, что такое пространство на самом деле является 2-мерным.

    б) Определить две новые координаты u, v в этом 2-мерном пространстве такие, чтобы метрика приняла вид $ds^2 = du^2 + dv^2$.

5. Пусть $g_{\mu\nu}$ – матрица, задающая невырожденную метрику сигнатуры $(+,-,-,-)$, $g = \det\, g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ – обратная матрица. Доказать тождества:

    а) $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\mu} = \dfrac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^{\nu}}$

    б) $g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = -\dfrac{1}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\nu}\right)}{\partial x^{\nu}}$

6. Метрика, для которой $g_{\mu\nu} = \rho^2 \delta_{\mu\nu}$ и ρ может зависеть от координат, называется конформной. Найти символы Кристоффеля для конформной метрики.