А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 13

13.1. Двойственность для банаховых пространств

Настало время выполнить обещание, данное в лекции 7, и установить некоторые красивые и полезные взаимосвязи между свойствами линейных операторов и их сопряженных. Начнем с нескольких определений.

Определение 13.1. Пусть X — нормированное пространство. *Аннулятором* подмножества $M \subseteq X$ называется множество

$$M^{\perp} = \{f \in X^* : f(x) = 0 \; \forall x \in M\}.$$

Преданнулятором подмножества $N \subseteq X^*$ называется множество

$${}^{\perp}N = \{x \in X : f(x) = 0 \; \forall f \in N\}.$$

Для обозначения аннуляторов и преданнуляторов не случайно используется тот же символ, что и для ортогональных дополнений:

Наблюдение 13.1. Пусть H — гильбертово пространство. Легко видеть, что каноническая биекция $R \colon H \to H^*$ (см. теорему 7.3) отображает ортогональное дополнение множества $M \subseteq H$ на его аннулятор. Аналогично, ортогональное дополнение к прообразу множества $N \subseteq H^*$ при биекции R — это в точности преданнулятор N.

Заметим теперь, что понятия аннулятора и преданнулятора согласованы с каноническим вложением во второе сопряженное (см. лекцию 11):

Наблюдение 13.2. Пусть X — нормированное пространство, $i_X \colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Тогда для любого подмножества $N \subseteq X^*$ справедливо равенство ${}^{\perp}N = i_X^{-1}(N^{\perp})$. Как следствие, если X рефлексивно, то $N^{\perp} = i_X({}^{\perp}N)$.

Таким образом, если договориться отождествлять X с частью X^{**} посредством канонического вложения, то ${}^{\perp}N = N^{\perp} \cap X$; если же X рефлексивно, то ${}^{\perp}N = N^{\perp}$. Стало быть, для рефлексивных пространств аннулятор и преданнулятор — это в сущности одно и то же.

Следующие простейшие свойства аннуляторов и преданнуляторов во многом аналогичны соответствующим свойствам ортогональных дополнений (см. предложение 5.4). Все они следуют непосредственно из определения 13.1, за исключением второй части утверждения (vi), которое опирается на следствие 9.5 из теоремы Хана–Банаха.

Предложение 13.3. *Пусть X — нормированное пространство. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *для любого подмножества $M \subseteq X$ его аннулятор $M^\perp$ — замкнутое векторное подпространство в X^*;*
(ii) *для любого подмножества $N \subseteq X^*$ его преданнулятор ${}^\perp N$ — замкнутое векторное подпространство в X;*
(iii) *если $M \subseteq X$, то $M^\perp = (\overline{\operatorname{span}}(M))^\perp$;*
(iv) *если $N \subseteq X^*$, то ${}^\perp N = {}^\perp(\overline{\operatorname{span}}(N))$;*
(v) $\{0\}^\perp = X^*$, $X^\perp = \{0\}$;
(vi) ${}^\perp\{0\} = X$, ${}^\perp X^* = \{0\}$;
(vii) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq X \Longrightarrow M_2^\perp \subseteq M_1^\perp \subseteq X^*$;
(viii) $N_1 \subseteq N_2 \subseteq X^* \Longrightarrow {}^\perp N_2 \subseteq {}^\perp N_1 \subseteq X$;
(ix) $\overline{\operatorname{span}}(M) \subseteq {}^\perp(M^\perp)$ *для любого $M \subseteq X$;*
(x) $\overline{\operatorname{span}}(N) \subseteq ({}^\perp N)^\perp$ *для любого $N \subseteq X^*$.*

Напомним, что для ортогональных дополнений в гильбертовом пространстве включение, аналогичное п. (ix) (или п. (x)) предложения 13.3, на самом деле является равенством (см. следствие 5.10). Естественно поинтересоваться, не являются ли равенствами сами включения (ix) и (x). Что касается включения (ix), то ответ положителен:

Предложение 13.4. *Для любого подмножества M нормированного пространства X справедливо равенство $\overline{\operatorname{span}}(M) = {}^\perp(M^\perp)$.*

Доказательство. Если $x \notin \overline{\operatorname{span}}(M)$, то в силу следствия 9.7 найдется такой функционал $f \in X^*$, что $f|_{\overline{\operatorname{span}}(M)} = 0$ и $f(x) \neq 0$. Отсюда получаем, что $f \in M^\perp$ и $x \notin {}^\perp(M^\perp)$. Это доказывает включение ${}^\perp(M^\perp) \subseteq \overline{\operatorname{span}}(M)$, а противоположное включение уже было отмечено в п. (ix) предложения 13.3. $\square$

Из предложения 13.4 с учетом наблюдения 13.2 немедленно следует, что для рефлексивных банаховых пространств включение (x) в предложении 13.3 — также равенство:

Следствие 13.5. *Если X — рефлексивное банахово пространство, то для любого подмножества $N \subseteq X^*$ справедливо равенство $\overline{\operatorname{span}}(N) = ({}^\perp N)^\perp$.*

В качестве следствия получаем следующий полезный критерий плотности векторного подпространства:

Следствие 13.6. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда:*

(i) *векторное подпространство $X_0 \subseteq X$ плотно в X тогда и только тогда, когда $X_0^\perp = \{0\}$;*
(ii) *если X рефлексивно, то векторное подпространство $Y_0 \subseteq X^*$ плотно в X^* тогда и только тогда, когда ${}^\perp Y_0 = \{0\}$.*

Доказательство. (i) Если X_0 плотно в X, то $X_0^\perp = \{0\}$ в силу предложения 13.3. Обратно, если $X_0^\perp = \{0\}$, то $\overline{X_0} = {}^\perp(X_0^\perp) = {}^\perp\{0\} = X$ в силу предложения 13.4.

(ii) Следует из (i) и наблюдения 13.2. $\square$

Предостережение 13.1. Для нерефлексивных пространств следствие 13.5, а также п. (ii) следствия 13.6 теряют силу! См. задачи на эту тему в листке 10.

С помощью аннуляторов легко описать пространства, сопряженные к подпространствам и к факторпространствам.

Предложение 13.7. *Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — замкнутое векторное подпространство. Тогда существуют изометрические изоморфизмы*

$$(X/X_0)^* \cong X_0^\perp, \qquad X_0^* \cong X^*/X_0^\perp.$$

Точнее, если $Q\colon X \to X/X_0$ — фактоотображение, то отображения

$$(X/X_0)^* \to X_0^\perp, \quad f \mapsto f \circ Q, \tag{13.1}$$

$$X^*/X_0^\perp \to X_0^*, \quad f + X_0^\perp \mapsto f|_{X_0}, \tag{13.2}$$

— изометрические изоморфизмы.

Доказательство. То, что (13.1) — изометрический изоморфизм, является частным случаем теоремы 3.5. Чтобы построить изоморфизм (13.2), обозначим через $J\colon X_0 \to X$ тождественное вложение и заметим, что сопряженный оператор $J^*\colon X^* \to X_0^*$ действует по правилу $f \mapsto f|_{X_0}$. Поскольку $\operatorname{Ker} J = X_0^\perp$, существует единственный линейный оператор $\varphi\colon X^*/X_0^\perp \to X_0^*$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "J^*"] \arrow[d] & X_0^* \\ X^*/X_0^\perp \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативной. Иначе говоря, φ — это и есть отображение (13.2). Применяя следствие 9.4 из теоремы Хана–Банаха, видим, что J^* — коизометрия; но тогда φ — изометрический изоморфизм в силу следствия 3.8. □

Приступим теперь к исследованию взаимосвязей между свойствами линейного оператора и его сопряженного.

Предложение 13.8. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Справедливы следующие соотношения:*

(i) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$;
(ii) $\overline{\operatorname{Im} T} = {}^\perp(\operatorname{Ker} T^*)$;
(iii) $\operatorname{Ker} T = {}^\perp(\operatorname{Im} T^*)$;
(iv) $\overline{\operatorname{Im} T^*} \subseteq (\operatorname{Ker} T)^\perp$;
(v) *если X рефлексивно, то* $\overline{\operatorname{Im} T^*} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Доказательство. (i) Пусть $f \in Y^*$; тогда

$$f \in \operatorname{Ker} T^* \iff (T^*f)(x) = 0\ \forall x \in X \iff f(Tx) = 0\ \forall x \in X \iff f \in (\operatorname{Im} T)^\perp.$$

(ii) Следует из (i) и предложения 13.4.
(iii) Пусть $x \in X$; тогда, с учетом следствия 9.5 из теоремы Хана–Банаха,

$$x \in \operatorname{Ker} T \iff f(Tx) = 0\ \forall f \in Y^* \iff (T^*f)(x) = 0\ \forall f \in Y^* \iff x \in {}^\perp(\operatorname{Im} T^*).$$

(iv), (v) Следует из (iii), предложения 13.3 и следствия 13.5. □

Объединяя предложение 13.8 со следствием 13.6, получаем следующий результат.

Следствие 13.9. *Пусть X, Y — нормированные пространства и $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Тогда*

(i) *T^* инъективен $\iff$ $\operatorname{Im} T$ плотен в Y;*
(ii) *если $\operatorname{Im} T^*$ плотен в X^*, то T инъективен;*
(iii) *если X рефлексивно, то T инъективен $\iff$ $\operatorname{Im} T^*$ плотен в Y.*

Предостережение 13.2. Для нерефлексивного X п. (v) предложения 13.8 и п. (iii) следствия 13.9 могут не выполняться! См. по этому поводу задачи из листка 10.

Замечание 13.3. Забегая вперед, отметим, что от требований рефлексивности в результатах этого параграфа все же можно в некотором смысле избавиться — для этого вместо привычной нам нормированной топологии на сопряженном пространстве нужно рассматривать так называемую *слабую** топологию. С этим понятием мы познакомимся позже в контексте топологических векторных пространств.

Итак, мы видим, что инъективные операторы в определенном смысле двойственны операторам с плотным образом. А какие операторы двойственны сюръективным операторам? Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 13.10. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *T топологически инъективен $\iff$ T^* сюръективен;*
(ii) *T сюръективен $\iff$ T^* топологически инъективен;*
(iii) *T — топологический изоморфизм $\iff$ T^* — топологический изоморфизм.*

Доказательство. (i) ($\Longrightarrow$) Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T_0"'] & Y \\ & \operatorname{Im} T \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd} \tag{13.3}$$

в которой J — тождественное вложение, а T_0 действует так же, как T. Диаграмма, сопряженная к (13.3), имеет вид

$$\begin{tikzcd} X^* & Y^* \arrow[l, "T^*"'] \arrow[d, "J^*"] \\ & (\operatorname{Im} T)^* \arrow[ul, "T_0^*"] \end{tikzcd}$$

Оператор J^* действует по формуле $J^*(f) = f|_{\operatorname{Im} T}$, поэтому он сюръективен (и даже коизометричен) в силу следствия 9.4 из теоремы Хана–Банаха. Оператор T_0 — топологический изоморфизм по условию, поэтому T_0^* — также топологический изоморфизм (см. предложение 7.2). Следовательно, оператор $T^* = T_0^* J^*$ сюръективен как композиция двух сюръекций.

(ii) ($\Longrightarrow$) Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & Y \\ X/\operatorname{Ker} T \arrow[ur, "T_0"'] & \end{tikzcd} \tag{13.4}$$

в которой Q — факторотображение, а T_0 индуцирован оператором T (см. теорему 3.4). Диаграмма, сопряженная к (13.4), имеет вид

$$\begin{tikzcd} X^* & Y^* \arrow[l, "T^*"'] \arrow[dl, "T_0^*"] \\ (X/\operatorname{Ker} T)^* \arrow[u, "Q^*"] & \end{tikzcd}$$

Оператор Q^* топологически инъективен (и даже изометричен) в силу предложения 13.7; см. (13.1). Оператор T сюръективен по предположению, поэтому он открыт в силу теоремы 12.1 об открытом отображении. Применяя следствие 3.8, видим, что T_0 — топологический изоморфизм; следовательно, таков же и T_0^* (см. предложение 7.2). Таким образом, оператор $T^* = Q^*T_0^*$ топологически инъективен как композиция двух топологически инъективных операторов.

(i) ($\Longleftarrow$) Применяя уже доказанную импликацию ($\Longrightarrow$) п. (ii) к оператору T^*, получаем, что оператор T^{**} топологически инъективен. Отождествляя X с частью X^{**}, а Y — с частью Y^{**} посредством канонических вложений, мы видим, что оператор $T = T^{**}|_X$ также топологически инъективен (см. предложение 11.2).

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$) в п. (ii) потребует дополнительной подготовки.

Лемма 13.11. *Пусть X — нормированное пространство, $M \subseteq X$ — замкнутое абсолютно выпуклое множество и $x_0 \notin M$. Тогда найдется такой функционал $f \in X^*$, что $|f(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in M$ и $|f(x_0)| > 1$.*

Доказательство. Предположим сначала, что основное поле $\mathbb{K}$ — это поле $\mathbb{R}$ действительных чисел. Согласно теореме 9.13 (iii), множества M и $\{x_0\}$ строго разделены гиперплоскостью, т.е. существует такой функционал $g \in X^*$, что $\sup_{x\in M} g(x) < g(x_0)$. С учетом того, что $0 \in M$, получаем неравенство $0 \leqslant \sup_{x\in M} g(x) < g(x_0)$. Домножая g на подходящую положительную константу, мы можем считать, что $\sup_{x\in M} g(x) \leqslant 1$ и $g(x_0) > 1$. Для любого $x \in M$ вектор $-x$ также лежит в M, поэтому $g(-x) \leqslant 1$, т.е. $g(x) \geqslant -1$. Следовательно, для любого $x \in M$ справедлива оценка $|g(x)| \leqslant 1$, и в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ все доказано.

Пусть теперь $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Рассматривая X как векторное пространство над $\mathbb{R}$, получаем ограниченный $\mathbb{R}$-линейный функционал $g\colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям $|g(x_0)| > 1$ и $|g(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in M$. Положим $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Согласно лемме 9.2, f — ограниченный $\mathbb{C}$-линейный функционал на X. Очевидно, $|f(x_0)| > 1$. Наконец, рассуждение, аналогичное проведенному в доказательстве п. (ii) леммы 9.2, показывает (убедитесь), что $|f(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in M$. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 13.10.

(ii) ($\Longleftarrow$) Выберем $c>0$ так, чтобы

$$\|T^*f\| \geqslant c\|f\| \qquad (f \in Y^*) \tag{13.5}$$

(см. предложение 2.1). Нам достаточно показать, что

$$\overline{T(\mathbb{B}_1^\circ)} \supseteq \mathbb{B}_c^\circ. \tag{13.6}$$

В самом деле, включение (13.6) будет означать, что T почти открыт, а значит, открыт в силу следствия 12.4 и поэтому сюръективен в силу следствия 2.4.

Предположим, что включение (13.6) не выполняется, и зафиксируем $y_0 \in \mathbb{B}_c^\circ \setminus \overline{T(\mathbb{B}_1^\circ)}$. Из леммы 13.11 следует, что найдется функционал $f \in Y^*$, удовлетворяющий условиям $|f(y_0)| > 1$ и $|f(y)| \leqslant 1$ для всех $y \in \overline{T(\mathbb{B}_1^\circ)}$. В частности, для любого $x \in \mathbb{B}_{1,X}^\circ$ имеем $|(T^*f)(x)| = |f(Tx)| \leqslant 1$. Следовательно, $\|T^*f\| \leqslant 1$, откуда с учетом (13.5) следует, что $\|f\| \leqslant c^{-1}$. Но тогда $|f(y_0)| \leqslant c^{-1}\|y_0\| < 1$, т.к. $y_0 \in \mathbb{B}_c^\circ$. Полученное противоречие доказывает включение (13.6), из которого, как уже отмечалось выше, следует сюръективность оператора T.

(iii) Очевидным образом следует из (i) и (ii). □

У теоремы 13.10 есть и «метрический» аналог:

Теорема 13.12. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *T изометричен $\iff$ T^* коизометричен;*
(ii) *T коизометричен $\iff$ T^* изометричен;*
(iii) *T — изометрический изоморфизм $\iff$ T^* — изометрический изоморфизм.*

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 13.10 с очевидными видоизменениями — убедитесь в этом самостоятельно.

Замечание 13.4. Отметим, что п. (iii) теоремы 13.10 можно доказать и без использования «трудной части» этой теоремы, т.е. импликации ($\Longleftarrow$) п. (ii). В самом деле, предположим, что T^* — топологический изоморфизм. Тогда и T^{**} — топологический изоморфизм. Следовательно, оператор $T = T^{**}|_X$ топологически инъективен и, в частности, имеет замкнутый образ. С другой стороны, из инъективности оператора T^* следует, что T имеет плотный образ (см. следствие 13.9). Следовательно, T — топологический изоморфизм. Аналогичные рассуждения применимы и к п. (iii) теоремы 13.12.

Прежде чем выводить следствия из теоремы 13.10, напомним следующее алгебраическое определение.

Определение 13.2. Пусть X, Y — векторные пространства. *Коядром* линейного оператора $T\colon X \to Y$ называется векторное пространство $\operatorname{Coker} T = Y/\operatorname{Im} T$.

Замечание 13.5. Есть и другое, более абстрактное определение коядра, имеющее смысл для морфизма произвольной категории с нулевым объектом. Возможно, оно встречалось вам в курсе алгебры, а если нет, то о нем можно прочитать, например, в книге С. И. Гельфанда и Ю. И. Манина «Методы гомологической алгебры» (М.: Наука, 1988) или С. Маклейна «Категории для работающего математика»(М.: Физматлит, 2004). В этой связи, во избежание возможной путаницы, важно отметить следующее. Коядро в смысле определения 13.2 — это коядро морфизма в категории векторных пространств. Коядро же морфизма $T\colon X \to Y$ в любой из категорий $\mathscr{Norm}$, $\mathscr{Norm}_1$, $\mathscr{Ban}$, $\mathscr{Ban}_1$ (см. замечание 4.3) — это $Y/\overline{\operatorname{Im} T}$. В дальнейшем мы всегда будем понимать коядро в смысле определения 13.2, несмотря на то, что использовать это понятие мы будем в контексте функционального анализа. Впрочем, для наших целей будет достаточно рассматривать коядра операторов с замкнутым образом, а для них оба понятия коядра совпадают.

Теорема 13.13. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Ограниченный линейный оператор $T\colon X \to Y$ имеет замкнутый образ тогда и только тогда, когда его сопряженный оператор $T^*\colon Y^* \to X^*$ имеет замкнутый образ. Если эти условия выполнены, то*

$$\operatorname{Im} T = {}^\perp(\operatorname{Ker} T^*), \quad \operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp, \tag{13.7}$$

и существуют изометрические изоморфизмы

$$\operatorname{Ker} T^* \cong (\operatorname{Coker} T)^*, \quad \operatorname{Coker} T^* \cong (\operatorname{Ker} T)^*. \tag{13.8}$$

Доказательство. Предположим, что T имеет замкнутый образ, и рассмотрим коммутативную диаграмму (13.4). Очевидно, оператор T_0 инъективен, и $\operatorname{Im} T_0 = \operatorname{Im} T$. Применяя теорему 12.6, видим, что T_0 топологически инъективен. Следовательно, оператор T_0^* сюръективен в силу теоремы 13.10. Из равенства $T^* = Q^* T_0^*$ заключаем, что $\operatorname{Im} T^* = \operatorname{Im} Q^*$. Но из предложения 13.7 (см. (13.1)) следует, что $\operatorname{Im} Q^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$. Это доказывает одновременно и замкнутость $\operatorname{Im} T^*$, и второе из равенств (13.7). Первое же из равенств (13.7) — непосредственное следствие предложения 13.8 (ii).

Предположим теперь, что T^* имеет замкнутый образ, и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T_0"'] & Y \\ & \overline{\operatorname{Im} T} \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd}$$

в которой J — тождественное вложение, а T_0 действует так же, как T. Оператор J^* действует по правилу $J^*(f) = f|_{\overline{\operatorname{Im} T}}$, поэтому он сюръективен в силу следствия 9.4 из теоремы Хана–Банаха. Из равенства $T^* = T_0^* J^*$ заключаем, что $\operatorname{Im} T^* = \operatorname{Im} T_0^*$. Таким образом, оператор T_0^* имеет замкнутый образ. С другой стороны, оператор T_0 имеет плотный образ по построению, а значит, T_0^* инъективен (см. следствие 13.9). Применяя теорему 12.6, заключаем, что T_0^* топологически инъективен. Но тогда T_0 сюръективен в силу теоремы 13.10, а это и означает, что $\operatorname{Im} T = \overline{\operatorname{Im} T}$.

Для завершения доказательства остается построить изоморфизмы (13.8). Для этого воспользуемся предложением 13.7, предложением 13.8 (i) и вторым из равенств (13.7):

$$(\operatorname{Coker} T)^* = (Y/\operatorname{Im} T)^* \cong (\operatorname{Im} T)^\perp = \operatorname{Ker} T^*;$$
$$(\operatorname{Ker} T)^* \cong X^*/(\operatorname{Ker} T)^\perp = X^*/\operatorname{Im} T^* = \operatorname{Coker} T^*. \qquad \square$$

Следующие четыре несложных, но красивых следствия из теоремы 13.13 докажите сами в качестве упражнений.

Следствие 13.14. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X, Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y, Z)$ и $TS = 0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *последовательность $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$ точна и $\operatorname{Im} T$ замкнут;*

(ii) *последовательность $X^* \xleftarrow{S^*} Y^* \xleftarrow{T^*} Z^*$ точна и $\operatorname{Im} S^*$ замкнут.*

Следствие 13.15. *Цепной комплекс $C = (C_n, d_n)$ банаховых пространств точен тогда и только тогда, когда точен его сопряженный комплекс $C^* = (C_n^*, d_n^*)$.*

Следствие 13.16 («лемма Серра»)**.** *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X, Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y, Z)$ и $TS = 0$. Предположим, что операторы S и T имеют замкнутые образы. Тогда существует изометрический изоморфизм*

$$(\operatorname{Ker} T / \operatorname{Im} S)^* \cong \operatorname{Ker} S^* / \operatorname{Im} T^*.$$

Следствие 13.17. *Если C — цепной комплекс банаховых пространств со строгими дифференциалами, то для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ существует изометрический изоморфизм $H^n(C^*) \cong H_n(C)^*$.*

Замечание 13.6. Лемма Серра (следствие 13.16) была, по-видимому, впервые явно сформулирована и доказана Ж.-П. Серром в 1955 г. в связи с некоторыми вопросами двойственности на комплексно-аналитических многообразиях. Строго говоря, речь в лемме Серра идет не о банаховых пространствах, а о так называемых *пространствах Фреше*, с которыми мы познакомимся позже, но доказательство от этого сложнее не становится. Начиная с работ Серра, следствие 13.16 и его разновидности систематически применяются в комплексно-аналитической геометрии (см., например, В. Д. Головин, «Гомологии аналитических пучков и теоремы двойственности», М.: Наука, 1986). Более общие следствия 13.14 и 13.15 играют важную роль в гомологической теории банаховых алгебр (см. А. Я. Хелемский, «Гомология в банаховых и топологических алгебрах», М.: МГУ, 1986).