Математические основы естествознания

Листок 8. Поля в искривленном пространстве-времени.

Обязательные задачи: 1, 2а, 2б, 3

1. Рассмотрим теорию вещественного скалярного поля φ в искривленном пространстве-времени размерности D с метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$S = \frac{1}{2}\int \left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - m^2\varphi^2\right)\sqrt{|g|}\, d^D x$$

(здесь и далее $g^{\mu\nu}$ – обратная матрица, $g = \det g_{\mu\nu}$).

   а) Написать уравнение движения поля φ.

   б) Найти компоненты тензора энергии-импульса поля φ и проверить его сохранение на уравнении движения.

2. Преобразование метрики вида $g_{\mu\nu}(x) \to \rho^2(x)g_{\mu\nu}(x)$ с произвольной (не обращающейся в нуль) функцией ρ называется вейлевским (или конформным).

   а) Проверить, что действие

$$S[\vec{X}, g] = \int \sqrt{|g|}\, g^{\mu\nu}\partial_\mu\vec{X}\partial_\nu\vec{X}\, d^D x$$

   (здесь $\vec{X}$ – векторное поле, принимающее значения в $\mathbb{R}^N$, а $\vec{X}\vec{Y}$ означает скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^N$), рассматриваемое как функционал от поля и метрики, при $D = 2$ инвариантно относительно произвольных вейлевских преобразований, а при $D \neq 2$ – нет. (Во избежание недоразумений подчеркнем, что вейлевское преобразование затрагивает только метрику, но не поле.)

   б) Найти компоненты тензора энергии-импульса поля $\vec{X}$ и проверить, что его след при $D = 2$ тождественно равен 0.

   в) Пусть дан некоторый функционал действия общего вида $S[g_{\mu\nu}, X]$, зависящий от метрики и набора полей X, инвариантный относительно общих координатных преобразований в D изметрениях. Доказать, что инвариантность действия $S[g_{\mu\nu}, X]$ относительно произвольных вейлевских преобразований метрики (так что поля при этом не меняются) эквивалентна тождественному обращению в ноль следа тензора энергии-импульса: $T^\mu_{\ \mu} = 0$.

3. В двумерных теориях поля удобно пользоваться комплексными координатами $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Рассмотрим некоторую теорию скалярного поля в *евклидовой* плоскости с координатами x, y.

   а) Выразить евклидову метрику на плоскости в комплексных координатах $z, \bar{z}$.

   б) Переписать действие задачи 2а на евклидовой плоскости ($D = 2$) в комплексных координатах.

в) Выразить компоненты тензора энергии-импульса $T_{zz}, T_{\bar{z}\bar{z}}, T_{z\bar{z}}, T_{\bar{z}z}$ в координатах $z, \bar{z}$ через его компоненты $T_{xx}, T_{yy}, T_{xy}, T_{yx}$ в исходных координатах.

г) Как выглядит условие сохранения тензора энергии-импульса в комплексных координатах? Что оно означает в случае, если след тензора энергии-импульса равен 0?

4.* Рассмотрим теорию вещественного скалярного поля φ в двумерном *евклидовом* пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$S = \frac{1}{2} \int \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + qR\varphi \right) \sqrt{|g|}\, d^2x$$

где R – скалярная кривизна, а q – параметр. Найти компоненты тензора энергии-импульса поля φ в теории на евклидовой плоскости ($g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$) и проверить его сохранение на уравнении движения.