11 Метрика и гравитация: кривизна

11.1 Принцип эквивалентности

Инертная и гравитационная массы: 2-й закон Ньютона и закон тяготения Кеплера-Ньютона из лагранжиана $\mathcal{L}_{\rm N} = \frac{m}{2}\dot{\mathsf{x}}^2 - m\Phi(\mathsf{x}) = m\left(\frac{\dot{\mathsf{x}}^2}{2} - \Phi(\mathsf{x})\right)$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \tag{11.1}$$

где масса m выпадает, а $\Phi(\mathsf{x}) = \frac{\kappa M}{|\mathsf{x}|}$. По аналогии с законом Кулона надо бы более точно написать

$$m_{\rm in}\frac{d^2x^i}{dt^2} = -m_{\rm gr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \tag{11.2}$$

но результат наблюдения $m_{\rm in} = m_{\rm gr} \equiv m$ с высокой точностью, по крайней мере $\frac{|m_{\rm in}-m_{\rm gr}|}{m} < 10^{-8}$ (все тела движутся одинаково). Тот же эффект наблюдается в неинерциальных системах отсчета, поэтому естественная гипотеза - описывать гравитацию с помощью нетривиальной метрики

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \qquad g_{\mu\nu}(x) \neq \eta_{\mu\nu} \tag{11.3}$$

Это утверждение локально - т.е. верно лишь в какой-то малой области пространства(-времени), но нельзя утверждать, что глобально эффекты гравитации могут быть "скомпенсированы" выбором системы отсчета.

Действительно - в нетривиальной внешней метрике движение частицы описывается уравнением геодезической (следующим из опять же пропорциональном массе действии $S[x;g] = -mc\int\sqrt{g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu}$)

$$\frac{d^2x^\nu}{ds^2} = -\Gamma^\nu_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} \tag{11.4}$$

где в правой части стоит (4-)сила гравитационного поля (действующая на единичную массу). Но, выбором системы координат можно занулить *все* компоненты связности Кристоффеля в любой заданной точке. Действительно, пусть в точке с координатами $x_0 = 0$ компоненты связности $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}\big|_{x=x_0=0} = \tilde{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda}$. Введем новые координаты

$$x'^\mu = x^\mu + \tfrac{1}{2}\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda}x^\nu x^\lambda \tag{11.5}$$

для которых
$$\left.\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right|_{x=x_0=0}=\delta^{\mu}_{\nu},\qquad \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}=\tilde{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda} \tag{11.6}$$
то есть $\left.\frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\rho}}\right|_{x=x_0=0}=\tilde{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda}$, и из закона преобразования
$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'}(x')\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\lambda'}}+\frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\rho}}=\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)\underset{x=x_0=0}{=}\tilde{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda} \tag{11.7}$$
следует, что *все* компоненты $\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'}(x')\big|_{x'=x'_0=0}$ в координатах x' равны нулю. Физически это значает, что мы перешли в ускоренную систему координат, так что ускорение компенсирует гравитационное поле в заданной точке.

11.2 Нерелятивистский предел

Выбирая криволинейные координаты в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3\subset\mathbb{R}^4$, вложенном в пространство Минковского, мы сохраняли $g_{00}=\eta_{00}=1$, в то время как $g_{ij}\neq\eta_{ij}$. Пусть наоборот $g_{ij}=\eta_{ij}$, а $g_{00}=1+\frac{2\Phi}{c^2}$, где $\Phi=\Phi(\mathsf{x})$ зависит только от пространственных координат.

Напишем действие релятивистской частицы $S=-mc\int\sqrt{g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu}}$ в этой метрике
$$\begin{aligned}S&=-mc\int\sqrt{g_{00}(\mathsf{x})c^2dt^2-d\mathsf{x}^2}=\\&=-mc^2\int dt\sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}-\frac{\dot{\mathsf{x}}^2}{c^2}}=-mc^2\int dt+\\&+m\int dt\left(\tfrac{1}{2}\dot{\mathsf{x}}^2-\Phi(\mathsf{x})\right)+\ldots\end{aligned} \tag{11.8}$$
что с точностью до константы и исчезающих в нерелятивистском пределе $c\to\infty$ членов совпадает с действием нерелятивистской частицы $\int dt\mathcal{L}_{\mathrm{N}}$ в ньютоновском потенциале $\Phi(\mathsf{x})$, в которое $m_{\mathrm{in}}=m_{\mathrm{gr}}\equiv m$ входит лишь общим множителем. Заметим, что данное рассуждение не меняется, если пространственная и “смешанная” части метрики $g_{ij}=\eta_{ij}+O(1/c^2)$, $g_{0i}=O(1/c^2)$ также приобретают поправки того же порядка к их нерелятивистским значениям.

11.3 Тензор кривизны

Осталось отличить "настоящее" гравитационное поле, создаваемое материей, от эффекта выбора неинерциальной системы отсчета. Для этого определим сначала характеристики, принципиально выделяющие метрику плоского пространства Минковского, которые нельзя изменить выбором системы координат.

Мы уже видели, что такими характеристиками *не* могут быть компоненты связности или символы Кристоффеля, так как их можно всегда занулить выбором системы координат. Но сделать это можно лишь *локально*, т.е. вообще говоря нельзя одновременно с самими $\{\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\big|_{x=x_0}\}$ одновременно занулить и их производные $\{\partial_\rho\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\big|_{x=x_0}\}$.

- Интуитивное представление: в плоском пространстве параллельный перенос вектора по замкнутому контуру всегда возвращает его в себя. Вообще говоря это не так - например на поверхности Земли, у которой есть *кривизна*.

- Аналогия с электромагнитным полем: $\{\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\} \leftrightarrow \{A_\mu\}$, где калибровочное поле можно рассматривать как связность в $U(1)$-расслоении. Ковариантные производные $\nabla_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$, коммутатор двух операторов

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = [\partial_\mu - iA_\mu, \partial_\nu - iA_\nu] = -i\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) = \\ = -iF_{\mu\nu} \tag{11.9}$$

  пропорционален кривизне связности, или напряженности электромагнитного поля. Другой вариант: формула Стокса

$$\oint_{\partial D} A_\mu dx^\mu = \int_D F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{11.10}$$

  т.е. если расслоение тривиально, т.е. $A_\mu = \partial_\mu\epsilon$, ($\epsilon(x)$ - хорошо определенная *глобально* функция), то $\oint_{\partial D} A_\mu dx^\mu$, $\forall D$, и соответственно $F_{\mu\nu} = 0$.

Вычислим коммутатор ковариантных производных в гравитации. Для примера рассмотрим действие оператора ковариантного дифференцирования на 1-форму: $A_{\mu;\lambda} = \nabla_\lambda A_\mu$. Тогда

$$A_{\mu;\lambda} = \nabla_\lambda A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu$$
$$A_{\mu;\lambda;\rho} = \nabla_\rho \nabla_\lambda A_\mu = \partial_\rho \left(\nabla_\lambda A_\mu\right) - \Gamma^\nu_{\mu\rho} \nabla_\lambda A_\nu - \Gamma^\nu_{\lambda\rho} \nabla_\nu A_\mu \tag{11.11}$$

и

$$A_{\mu;\lambda;\rho} - A_{\mu;\rho;\lambda} = \partial_\rho \left(\nabla_\lambda A_\mu\right) - \partial_\lambda \left(\nabla_\rho A_\mu\right) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \nabla_\rho A_\nu - \Gamma^\nu_{\mu\rho} \nabla_\lambda A_\nu \tag{11.12}$$

т.е. последний член в правой части (11.11) сокращается при антисимметризации из-за симметричности символов Кристоффеля. Далее

$$\begin{gathered} A_{\mu;\lambda;\rho} - A_{\mu;\rho;\lambda} = \\ = \partial_\rho \left(\partial_\lambda A_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu\right) - \partial_\lambda \left(\partial_\rho A_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\rho} A_\nu\right) + \\ + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \left(\partial_\rho A_\nu - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} A_\sigma\right) - \Gamma^\nu_{\mu\rho} \left(\partial_\lambda A_\nu - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} A_\sigma\right) = \\ = \partial_\lambda \left(\Gamma^\nu_{\mu\rho} A_\nu\right) - \partial_\rho \left(\Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu\right) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \partial_\rho A_\nu - \Gamma^\nu_{\mu\rho} \partial_\lambda A_\nu + \\ + \left(\Gamma^\nu_{\mu\rho} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\right) A_\sigma = R^\sigma{}_{\mu\lambda\rho} A_\sigma \end{gathered} \tag{11.13}$$

где

$$R^\sigma{}_{\mu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \tag{11.14}$$

называется тензором кривизны Римана(-Кристоффеля). Аналогию с формулой (11.9) можно усмотреть, если воспользоваться симметрией символов Кристоффеля по нижним индексам и, объединив их в матрицы Γ_μ с матричными элементами $\left(\Gamma_\mu\right)^\nu_\lambda = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}$, переписать (11.14) в виде

$$\begin{gathered} R^\sigma{}_{\mu\lambda\rho} = \left(R_{\lambda\rho}\right)^\sigma{}_\mu = \\ = \partial_\lambda \left(\Gamma_\rho\right)^\sigma_\mu - \partial_\rho \left(\Gamma_\lambda\right)^\sigma_\mu + \left(\Gamma_\lambda\right)^\sigma_\nu \left(\Gamma_\rho\right)^\nu_\mu - \left(\Gamma_\rho\right)^\sigma_\nu \left(\Gamma_\lambda\right)^\nu_\mu = \\ = \left(\partial_\lambda \Gamma_\rho - \partial_\rho \Gamma_\lambda + \Gamma_\lambda \cdot \Gamma_\rho - \Gamma_\rho \cdot \Gamma_\lambda\right)^\sigma_\mu \end{gathered} \tag{11.15}$$

матричных элементов матрицы $R_{\lambda\rho}$, являющейся уже полным аналогом напряженности (11.9) в случае неабелевых (со значениями в матричной алгебре Ли) калибровочных полей.

Отметим некоторые свойства тензора кривизны:

- Очевидно, что $R^\sigma{}_{\mu\lambda\rho} = -R^\sigma{}_{\mu\rho\lambda}$. Введем $R_{\nu\mu\lambda\rho} = g_{\nu\sigma} R^\sigma{}_{\mu\lambda\rho}$. Тогда

$$\begin{gathered} R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\nu\mu\lambda\rho}, \qquad R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\mu\nu\rho\lambda} \\ R_{\mu\nu\lambda\rho} = R_{\lambda\rho\mu\nu} \end{gathered} \tag{11.16}$$

- Всегда выполняется тождество(а) Бианки

$$\nabla_\nu R^\sigma{}_{\mu\lambda\rho} + \nabla_\rho R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} + \nabla_\lambda R^\sigma{}_{\mu\rho\nu} = 0 \tag{11.17}$$

  аналог уравнения(й) Максвелла $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0$.

- Можно, конечно, рассмотреть действие коммутатора $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ и в других расслоениях - формулы будут аналогичны, например

$$\begin{gathered} V^\lambda{}_{;\mu;\nu} - V^\lambda{}_{;\nu;\mu} = -V^\sigma R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \\ B_{\lambda\rho;\mu;\nu} - B_{\lambda\rho;\nu;\mu} = B_{\sigma\rho} R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu} + B_{\lambda\sigma} R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} \end{gathered} \tag{11.18}$$

  и т.д. Первое из этих уравнений эквивалентно утверждению, что в кривом пространстве параллельный перенос вектора, вообще говоря, зависит от выбора пути.

- Удобно ввести симметричный тензор Риччи и скалярную кривизну

$$\begin{gathered} R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu} \\ R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \end{gathered} \tag{11.19}$$

  Заметим, что в плоском пространстве *все* компоненты тензора кривизны $R_{\mu\nu\lambda\rho} = 0$, что отнюдь не сводится к $R = 0$ (одно уравнение) или $R_{\mu\nu} = 0$ (риччи-плоские пространства: 10 уравнений в 4-мерии, а у тензора кривизны 20 независимых компонент).

Исключения составляют пространства малой размерности:

- Одномерное пространство всегда плоское: $e(\tau)d\tau = ds$ всегда можно сделать постоянной выбором координат;

- В двумерном пространстве существует единственная нетривиальная компонента у $R_{\mu\nu\lambda\rho}$, поэтому все выражается через саму метрику и скалярную кривизну, например

$$R_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \qquad \mu, \nu = 1, 2 \tag{11.20}$$

- В трехмерном пространстве $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ выражается через тензор Риччи $R_{\mu\nu}$. В частности, любое трехмерное риччи-плоское пространство является плоским.