

Листок 8

1. Доказать, что параллельный перенос в векторном расслоении является невырожденным линейным преобразованием слоев.
2. Ответить на два вопроса, сформулированных в 8 лекции.
3. Докажите, что разность двух связностей определяет сечение расслоения $\Omega^1(M) \otimes \text{End } V$.
4. * Докажите, что разность двух G -связностей определяет сечение расслоения $\Omega^1(M) \otimes \text{Lie } G$ ($\text{Lie } G$ – касательная алгебра Ли к линейной группе Ли $G : V$).
5. Как ввести связность в тензорное произведение двух векторных расслоений E_1 и E_2 со связностями ∇_1 и ∇_2 ?
6. Символы Кристоффеля на координатной карте атласа G -расслоения можно понимать как сечения расслоения $\Gamma(\text{Lie } G \otimes \Omega^1(M) |_U)$. Почему?
7. Сечение s называется горизонтальным, если $\nabla_X(s) = 0$ для любого $X \in \Gamma(TM)$. Есть ли горизонтальные сечения у связности Леви-Чивита касательного расслоения на стандартной сфере $S^2 \subset \mathbb{E}^3$?

Геометрия формы Маурера-Картана.

Форма Маурера-Картана на группе Ли G со значениями в алгебре Ли $\text{Lie } G$ задается формой:

$$\omega(v) = (L_g^{-1})_* v,$$

$v \in T_g G$, L_g – левый сдвиг, а $(L_g^{-1})_*$ – его дифференциал в точке $g \in G$.

8. Доказать, что форма ω принимает значения в алгебре Ли $\text{Lie } G$ и $\omega : T_g G \rightarrow \text{Lie } G$ – изоморфизм для всех $g \in G$.
9. Доказать, что форма ω левоинвариантна.
10. Доказать, что при правых сдвигах $R_g \gamma = \gamma g$,

$$R_g^* \omega = \text{Ad } g^{-1}(\omega).$$

11. * Форма ω является плоской, т. е.

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

$[\omega, \omega]$ – это 2-форма со значениями в алгебре $\text{Lie } G$, которая в каждой точке на паре векторов $u, v \in T_g G$ принимает значение $[\omega(u), \omega(v)]$.

Указание: касательное расслоение на группе Ли тривиально (почему?)