12.1. Пусть X, Y, Z — нормированные пространства. Докажите, что билинейный оператор $\varphi\colon X \times Y \to Z$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен в следующем смысле: существует такое $C \geqslant 0$, что $\|\varphi(x,y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in X,\ y \in Y$.

12.2. Пусть A — алгебра, снабженная нормой. Предположим, что умножение $A \times A \to A$ непрерывно. Докажите, что

1) на A существует субмультипликативная норма, эквивалентная исходной;

2) если A унитальна, то на A существует субмультипликативная норма, эквивалентная исходной и удовлетворяющая условию $\|1\| = 1$.

Подсказка. В случае (2) рассмотрите операторы умножения $L_a\colon A \to A,\ b \mapsto ab$.

12.3. 1) Докажите, что пополнение нормированной алгебры — банахова алгебра.

2) Докажите, что факторалгебра нормированной алгебры по замкнутому двустороннему идеалу — нормированная алгебра.

12.4. Докажите, что норма

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{\|f^{(k)}\|_\infty}{k!}$$

на алгебре $C^n[a,b]$ субмультипликативна и эквивалентна норме $\|f\| = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty$. (Здесь, как обычно, $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ — равномерная норма.) Отсюда и из задачи 3.11 следует, что $C^n[a,b]$ — банахова алгебра.

12.5. Пусть G — группа, снабженная топологией. Предположим, что умножение $G \times G \to G$ непрерывно по каждому аргументу, и что операция $g \mapsto g^{-1}$ непрерывна в единице. Докажите, что она непрерывна всюду на G.

Из предыдущей задачи с учетом доказанного на лекции следует, что операция $a \mapsto a^{-1}$ на группе обратимых элементов любой банаховой алгебры непрерывна.

12.6. 1) Докажите, что в унитальной банаховой алгебре $A \neq 0$ не может существовать таких элементов a, b, что $[a,b] = ab - ba = 1$.

2) Докажите, что на алгебре дифференциальных операторов вида $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}$, где $a_k \in \mathbb{C}[x]$ (она называется *алгеброй Вейля*), не существует субмультипликативных полунорм, кроме тождественно нулевой.

12.7. Пусть A — унитальная нормированная (но не обязательно банахова) алгебра, $A^\times \subset A$ — группа обратимых элементов. Верно ли, что

1) если $a \in A$ и $\|a\| < 1$, то $1 - a \in A^\times$;

2) $A^\times$ открыто в A;

3) отображение $A^\times \to A^\times,\ a \mapsto a^{-1}$ непрерывно?

12.8. Верна ли теорема Гельфанда–Мазура для неполных нормированных алгебр?

12.9-b (*банахова лемма Шура*)**.** Пусть дано неприводимое представление группы G в банаховом пространстве X ограниченными операторами. Докажите, что любой морфизм G-модулей $\varphi\colon X \to X$ имеет вид $\varphi = \lambda \mathbf{1}_X$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компактное подмножество. Рассмотрим следующие подалгебры в $C(K)$:

$$\mathscr{P}(K) = \overline{\{p|_K : p \text{ — многочлен}\}};$$
$$\mathscr{R}(K) = \overline{\{r|_K : r \text{ — рациональная функция с полюсами вне } K\}};$$
$$\mathscr{A}(K) = \{f \in C(K) : f \text{ голоморфна на } \operatorname{Int} K\}$$

(черта наверху означает замыкание в $C(K)$). Из теоремы Вейерштрасса (см. курс комплексного анализа) следует, что $\mathscr{A}(K)$ — замкнутая подалгебра в $C(K)$. Очевидно, $\mathscr{P}(K) \subseteq \mathscr{R}(K) \subseteq \mathscr{A}(K) \subseteq C(K)$.

12.10 (*дисковая алгебра*)**.** Пусть $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$.
1) Докажите, что $\mathscr{P}(\overline{\mathbb{D}}) = \mathscr{R}(\overline{\mathbb{D}}) = \mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$.
2) Постройте изометрический изоморфизм $\mathscr{P}(\mathbb{T}) \cong \mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$.

12.11. 1) Докажите, что $\mathscr{P}(\mathbb{T}) \neq \mathscr{R}(\mathbb{T})$.
2) Пользуясь теоремой Вейерштрасса (любая непрерывная 2π-периодическая функция на прямой приближается по равномерной норме тригонометрическими многочленами), докажите, что $\mathscr{R}(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$.

12.12. 1) Докажите, что $\mathscr{R}(K)$ спектрально инвариантна в $C(K)$.
2) Всегда ли $\mathscr{P}(K)$ спектрально инвариантна в $C(K)$?

12.13-b. 1) Докажите, что если $\mathscr{P}(K) = \mathscr{R}(K)$, то $\mathbb{C} \setminus K$ связно.
2) Докажите, что если $\mathbb{C} \setminus K$ связно, то $\mathscr{P}(K) = \mathscr{R}(K)$. (На самом деле верно большее: $\mathscr{P}(K) = \mathscr{A}(K)$, но это уже нетривиальная теорема Мергеляна.)

12.14-b (*швейцарский сыр*)**.** Пусть $K = \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, где D_i — открытые круги с попарно не пересекающимися замыканиями, выбранные таким образом, что $\sum_i r_i < \infty$ (где r_i — радиус D_i) и $\operatorname{Int} K = \varnothing$. Докажите, что $\mathscr{R}(K) \neq C(K)$ (несмотря на то, что $\operatorname{Int} K = \varnothing$).

Подсказка. Постройте ненулевую меру μ на K, сосредоточенную на объединении границ кругов D_i и такую, что $\int_K f\, d\mu = 0$ для любой $f \in \mathscr{R}(K)$.