13.1. Верно ли, что $r(a) = \|a\|$ для любого $a \in A$, если **1)** $A = L^\infty(X, \mu)$? **2)** $A = C^n[a, b]$?

13.2 (*оператор взвешенного сдвига*)**.** Пусть $H = \ell^2$ и $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Оператор

$$T_\alpha \colon H \to H, \quad T_\alpha(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$$

называется *оператором взвешенного сдвига.* (*Реклама*: такие операторы изучаются давно, но особую популярность приобрели в 90-х гг. прошлого века ввиду их важности для теории представлений компактных квантовых групп.)
1) Вычислите $\|T_\alpha\|$.
2) Вычислите $r(T_\alpha)$. Для каких последовательностей $\alpha \in \ell^\infty$ оператор T_α квазинильпотентен? Приведите конкретный пример такой последовательности.

13.3 (*оператор Вольтерра*)**.** Пусть $I = [a, b]$, $H = L^2(I)$ и $K \in L^2(I \times I)$. *Оператор Вольтерра* $V_K \colon L^2(I) \to L^2(I)$ задается формулой

$$(V_K f)(x) = \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy$$

Обратите внимание, что это частный случай интегрального оператора Гильберта–Шмидта из задачи 2.12. (*Реклама*: операторы Вольтерра образуют один из наиболее классических и давно изучаемых классов линейных операторов; они играют важную роль в теории интегральных уравнений, описывающих различные физические процессы.)
1) Докажите, что если функция K ограничена, то V_K квазинильпотентен.
2-b) Докажите, что V_K квазинильпотентен для любой $K \in L^2(I \times I)$.

Таким образом, *интегральное уравнение Вольтерра второго рода* $f = \lambda V_K f + g$ относительно неизвестной функции $f \in L^2(I)$ имеет единственное решение для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и любой $g \in L^2(I)$.

13.4. Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектр диагонального оператора в ℓ^∞.

13.5. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, f — существенно ограниченная измеримая функция на X и M_f — оператор умножения на f, действующий в $L^p(X, \mu)$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектр оператора M_f.

13.6. Найдите спектр оператора $T \colon L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$, действующего по формуле

$$(Tf)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t - s) f(s)\, ds.$$

13.7. Найдите спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр операторов правого и левого сдвига, действующих в пространстве c_0.

13.8. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространства ℓ^1.

13.9. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространства ℓ^∞.

13.10. Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектр оператора двустороннего сдвига в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$.

13.11-b. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространств $\ell^p(\mathbb{Z})$ и $c_0(\mathbb{Z})$.

13.12. Для фиксированного $\zeta \in \mathbb{T}$ определим оператор сдвига $T_\zeta \colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ формулой $(T_\zeta f)(z) = f(\zeta^{-1} z)$. Найдите его спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр.

13.13-b. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространств $L^p(\mathbb{T})$ и $C(\mathbb{T})$.

13.14-b. Пусть A — ненулевая унитальная алгебра и $u, v \in A$ — обратимые элементы, удовлетворяющие соотношению $uv = qvu$, где $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (*Терминология*: если A порождена элементами u, v и между ними нет других соотношений, то A называется *квантовым тором.* Это — одна из простейших некоммутативных нётеровых алгебр, играющая важную роль в некоммутативной геометрии.)
1) Докажите, что если $|q| \neq 1$, то A не может быть банаховой алгеброй.
2) Пусть $|q| = 1$, A — банахова алгебра и q не является корнем из единицы. Что можно сказать про спектры элементов u и v?
3) Пусть $A = \mathscr{B}(X)$ — алгебра ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X, и пусть выполнены условия п. 2. Предположим, что операторы u и v изометричны. Найдите их спектры.
4) Приведите пример операторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющих условиям п. 3. (*Подсказка*: см. задачи 13.5 и 13.12. *Реклама*: такие операторы тесно связаны с *каноническими коммутационными соотношениями* Г. Вейля в квантовой механике.)

Определение 13.1. *Пространство Харди* — это замкнутое подпространство в $L^2(\mathbb{T})$, определяемое следующим образом:

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) \, : \, \langle f, z^n \rangle = 0 \quad \forall\, n < 0\}.$$

13.15-b. Для каждой непрерывной функции f на открытом единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ и каждого $0 < \rho < 1$ положим

$$\|f\|_\rho = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Докажите, что определение пространства H^2, данное выше, эквивалентно следующему:

$$H^2 = \{f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \, : \, f \text{ голоморфна и } \|f\| = \lim_{\rho \to 1} \|f\|_\rho < \infty\}.$$

13.16-b. Докажите, что оператор правого сдвига в ℓ^2 унитарно эквивалентен оператору умножения M_z в H^2. Интерпретируйте результаты о точечном, непрерывном и остаточном спектре этого оператора (см. лекцию) с точки зрения теории аналитических функций.

13.17-b. Пусть A — унитальная банахова алгебра и $B \subseteq A$ — подалгебра, содержащая 1_A. Докажите, что
1) $B^\times$ — открыто-замкнутое подмножество в $B \cap A^\times$;
2) для каждого $b \in B$ резольвентное множество $\rho_B(b) = \mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ открыто-замкнуто в $\rho_A(b)$;
3) для каждого $b \in B$ спектр $\sigma_B(b)$ является объединением спектра $\sigma_A(b)$ и некоторого семейства ограниченных компонент связности множества $\rho_A(b)$;
4) для каждого $b \in B$ справедливо включение $\partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b)$.