Математические основы естествознания

Листок 9. Движение в гравитационном поле и простейшие решения уравнений гравитационного поля.

Обязательные задачи: 1а, 1б, 2а, 3а, 3б, 4а, 4б, 5а, 5б.

1. Для частицы массы m в искривленном пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$ вектор 4-импульса определяется своими ковариантными компонентами как $p_\mu = -\partial S/\partial x^\mu$, где действие $S = -m\int^P ds$ рассматривается как функция от точки P пространства-времени при движении по геодезической.

   а) Исходя из данного определения выразить ко- и контравариантные компоненты 4-импульса частицы через ее 4-скорость $u^\mu = dx^\mu/ds$.

   б) Путем варьирования действия получить уравнение движения частицы в двух видах: как уравнение на контравариантные компоненты ее 4-импульса p^μ и как уравнение на ковариантные компоненты p_μ.

2. Постоянным называется гравитационное поле, в котором можно выбрать систему отсчета так, чтобы все компоненты метрического тензора не зависели от временной координаты $x^0 = ct$.

   а) Доказать, что при движении пробной частицы в постоянном гравитационном поле ее энергия p_0 постоянна вдоль мировой линии.

   б) Постоянное гравитационное поле, в котором смешанные компоненты g_{0i} метрического тензора равны нулю, называется статическим. В статическом поле $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = d\tau^2 - dl^2$, где $d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dx^0$ – инфинитезимальный интервал собственного времени неподвижного наблюдателя в данной точке, а $dl = \sqrt{(-g_{ik})dx^i dx^k}$ – элемент пространственного расстояния. Выразить энергию частицы массы m в статическом поле через абсолютную величину вектора ее скорости в некоторой точке пространства, измеренную в собственном времени неподвижного наблюдателя, находящегося в этой точке. (*Указание:* Упомянутая в условии абсолютная величина (3-мерного) вектора скорости частицы есть $v = dl/d\tau$.)

3. В плоском 2-мерном пространстве Минковского со стандартными координатами (t, x) введем новые координаты τ, ρ $(\rho > 0)$ такие, что

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = \rho^2 d\tau^2 - d\rho^2$$

   (аналог полярных координат). Такие координаты называются координатами Риндлера.

   а) Найти явные формулы преобразования от координат Минковского к координатам (системе отсчета) Риндлера и обратно. Какую область пространства Минковского можно описать в координатах Риндлера? На плоскости (x, t) нарисовать линии уровня $\rho = \text{const}$, $\tau = \text{const}$ (координатную сетку). Как в координатах Риндлера выглядит световой конус для точки $(t, x) = (0, 0)$?

б) Какова мировая линия риндлеровского наблюдателя, покоящегося в некоторой точке ρ_0, в координатах Минковского? Как выглядит мировая линия минковского наблюдателя, покоящегося в некоторой точке x_0, нарисованная на плоскости (ρ, τ) (в координатах Риндлера)?

в) Показать, что в пространстве-времени Минковского систему отсчета Риндлера можно реализовать, поместив наблюдателей вдоль оси $x > 0$ и заставив их двигаться одновременно с нулевой начальной скоростью и с постоянным ускорением, равным $1/\rho$, где ρ – начальное положение наблюдателя на оси x.

г) ("Учебный" горизонт событий.) Риндлеровский наблюдатель с координатой ρ_0 в момент времени τ_0 роняет часы. Какое время они покажут, когда достигнут начала отсчета (точки $\rho = 0$)? Долетят ли они до начала отсчета с точки зрения риндлеровского наблюдателя?

4. Рассмотрим сферически симметричную метрику

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2\,, \qquad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2,$$

где $\nu = \nu(r,t)$, $\lambda = \lambda(r,t)$ – некоторые функции радиальной координаты r и времени t, а θ, φ – стандартные угловые координаты на двумерной сфере.

а) Вычислить символы Кристоффеля для этой метрики.

б) Найти компоненты тензора Риччи и в явном виде выписать систему уравнений Эйнштейна в пустоте ($T_{\mu\nu} = 0$).

в) Решить уравнения Эйнштейна из пункта б) и получить решение, которое описывает гравитационное поле, создаваемое точечной массой M в начале координат ($r = 0$):

$$ds^2 = \Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Такая метрика называется метрикой Шварцшильда.

5. Рассмотрим движение пробной частицы в метрике Шварцшильда (задача 4в).

а) Пусть частица падает на центр по радиусу ($\theta = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$). Как связаны между собой ее координатная скорость dr/dt при некотором значении r, измеряемая наблюдателем на бесконечности, и локально измеряемая скорость по отношению к неподвижному наблюдателю, находящемуся в точке на траектории ее падения с тем же значением радиальной координаты r?

б) Вывести и проинтегрировать уравнения движения для падающей по радиусу частицы массы m, если она начинает движение из состояния покоя при $r = R$ в момент $t = 0$. На плоскости (r, t) нарисовать мировую линию падающей частицы.

в)* Найти траекторию движения частицы из задачи б) другим способом – путем решения уравнения Гамильтона-Якоби

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu} = m^2$$

и сравнить результаты.

г) Пусть падающая частица в условиях задачи б) – это часы, поставленные на 0 в начале движения. Найти время, которое они покажут в момент достижения гравитационного радиуса $r_G = 2M$. За какое время они достигнут гравитационного радиуса с точки зрения удаленного неподвижного наблюдателя, выронившего часы?