

Вводная лекция

- 1 Релятивистская инвариантность
- 2 Электромагнитное поле
- 3 Скалярное поле, лагранжианы
- 4 Электромагнитное поле. Волны
- 5 Запаздывающие потенциалы
- 6 Энергия и импульс в теории поля
- 7 Взаимодействующие скалярные поля
- 8 Скалярная электродинамика
- 9 Топологические решения в теории поля

10 Теории на нетривиальных многообразиях

10.1 Локальные координатные преобразования

Метрика (инфинитезимальное расстояние) на любом многообразии \mathcal{M}

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (10.1)$$

Пример: пространство Минковского \mathbb{R}^4 (в декартовых координатах)

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

Однако, в сферических координатах

$$ds^2 = g_{\mu'\nu'}(x')dx'^{\mu'} dx'^{\nu'} = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (10.3)$$

т.е. $(\mu', \nu' = t, r, \theta, \phi)$

$$g_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

Закон преобразования: $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = g_{\mu'\nu'}(x')dx'^{\mu'} dx'^{\nu'}$, или

$$g_{\mu'\nu'}(x') = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}} \quad (10.5)$$

ковариантность при *локальных* координатных преобразованиях. Матрица преобразования $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} = \Lambda_{\mu'}^\mu$ сама зависит от координат.

Тот же самый принцип задает закон преобразования для “ковариантного вектора” - компонент 1-формы $A = A_\mu(x)dx^\mu = A_{\mu'}(x')dx'^{\mu'}$, $A \in T^*\mathcal{M}$

$$A_{\mu'}(x') = A_\mu(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \quad (10.6)$$

($\int A_\mu(x) dx^\mu = \text{inv}$) и для “контравариантного вектора” - компонент векторного поля $V \in T\mathcal{M}$, $V = V^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} = V^{\mu'}(x') \frac{\partial}{\partial x'^{\mu'}}$

$$V^{\mu'}(x') = V^\mu(x) \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \quad (10.7)$$

Закон преобразования легко обобщается на (p, q) -ю тензорную степень (ко)касательного расслоения $\mathcal{T}_{(p,q)} = (T\mathcal{M})^{\otimes p} \otimes (T^*\mathcal{M})^{\otimes q}$, например метрика - симметричный ковариантный тензор 2-го порядка.

Инвариантная форма объема: из (10.5) следует, что

$$\det g(x') = \det g(x) \cdot (\partial(x)/\partial(x'))^2 \quad (10.8)$$

где $\partial(x)/\partial(x')$ - якобиан замены координат. Поскольку

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^D = \partial(x)/\partial(x') dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^D \quad (10.9)$$

то¹

$$\sqrt{\det g(x)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^D = \sqrt{\det g(x')} dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^D \quad (10.10)$$

и можно определить инвариантную форму объема ($D = 4$, лоренцева сигнатура)

$$d^4x \rightarrow d\Omega = \sqrt{-\det g(x)} dx^0 d^3x = \sqrt{-\det g(x)} d^4x \equiv \sqrt{-g} d^4x \quad (10.11)$$

10.2 Частица во внешней метрике

Действие определяется как и для релятивистской частицы в пространстве Минковского

$$S[x; g] = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu} = -mc \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (10.12)$$

Траектория частицы в нетривиальной метрике - решение уравнений движения. Вариация $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$:

$$\begin{aligned} 2ds \delta ds &= \delta g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu}(x) \delta dx^\mu dx^\nu = \\ &= \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) \delta x^\lambda dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu}(x) d\delta x^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (10.13)$$

¹Строго говоря, при извлечении квадратного корня $\sqrt{\det g(x)}$ возникает *модуль* якобиана $|\partial(x)/\partial(x')|$, поэтому это равенство буквально выполняется лишь для преобразований, сохраняющих ориентацию - а в противном случае следует учитывать знак.

или

$$\delta ds = \frac{1}{2} \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} dx^\nu + g_{\mu\nu}(x) \frac{d\delta x^\mu}{ds} dx^\nu \quad (10.14)$$

а стало быть

$$\begin{aligned} \int \delta ds &= \int \frac{1}{2} \partial_\lambda g_{\mu\nu} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} dx^\nu + \int g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{ds} dx^\nu = \\ &= \int \frac{1}{2} \partial_\lambda g_{\mu\nu} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} dx^\nu - \int \delta x^\mu d \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right) + \\ &\quad + \int d \left(g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \right) \simeq \\ &\simeq \int ds \delta x^\lambda \left(\frac{1}{2} \partial_\lambda g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \partial_\mu g_{\lambda\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} \right) \end{aligned} \quad (10.15)$$

и уравнения движения можно записать как

$$g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (10.16)$$

или, окончательно, (определив метрику с верхними индексами как обратную матрицу $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$), получим уравнение *геодезической*

$$\frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (10.17)$$

где (переходя от (10.16) к (10.17) мы симметризовали выражение в скобках по μ и ν)

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (\partial_\mu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\lambda}) \quad (10.18)$$

называются символами Кристоффеля (коэффициентами связности, согласованными с метрикой). В постоянной метрике все $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = 0$, и геодезическая превращается в прямую $\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0$ (например, в плоском пространстве Минковского в декартовой системе координат).

10.3 Ковариантные производные. Связность

Посмотрим теперь с другой стороны - забудем про плоское пространство и даже (временно) про метрику. Попробуем определить параллельные вектора на произвольном многообразии \mathcal{M} .

Параллельный перенос вектора $V = V^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ вдоль кривой (траектории) $x^\mu = x^\mu(s)$ с касательным вектором (4-скоростью) $\xi^\mu = dx^\mu/ds$:

$$\frac{dV^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu \xi^\lambda = 0 \quad (10.19)$$

где $\{\Gamma_{\nu\lambda}^\mu\}$ - пока абы какие (не связанные с метрикой, вообще говоря не симметричные по нижним индексам) компоненты *связности*, задающей структуру параллельности. Уравнение (10.19) можно переписать в виде

$$\xi^\lambda \nabla_\lambda V^\mu = \frac{dx^\lambda}{ds} \nabla_\lambda V^\mu = \frac{dx^\lambda}{ds} \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu \right) = 0 \quad (10.20)$$

где

$$\nabla_\lambda V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu \equiv V_{;\lambda}^\mu \quad (10.21)$$

будем называть ковариантной производной, а его (однозначное!) решение с начальным условием $x^\mu(0) = x_P^\mu$ определяет параллельный перенос вектора из точки P вдоль траектории $\{x^\mu(s) : x^\mu(0) = x_P^\mu\}$. При $V = \frac{d}{ds} = \frac{dx^\mu}{ds} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ уравнение (10.19) переходит в (10.17).

- Легко обобщается на (p, q) -ю тензорную степень (ко)касательного расслоения $\mathcal{T}_{(p,q)} = (TM)^{\otimes p} \otimes (T^*M)^{\otimes q}$: - оператор ковариантного дифференцирования $\nabla : \mathcal{T}_{(p,q)} \rightarrow \mathcal{T}_{(p,q+1)}$ (ковариантная производная преобразуется как тензор - в отличие, вообще говоря, от обычной производной!). За исключением скаляра, для которого $\Phi \in \mathcal{T}_{(0,0)}$: $\nabla\Phi \in \mathcal{T}_{(0,1)}$ и $\nabla_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi$. Взяв в качестве скалярной функции $\Phi = V^\mu A_\mu = \iota_V(A)$ и пользуясь

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda(V^\mu A_\mu) &= (\nabla_\lambda V^\mu) A_\mu + V^\mu \nabla_\lambda(A_\mu) \\ \nabla_\lambda(V^\mu A_\mu) &= \partial_\lambda(V^\mu A_\mu) \end{aligned} \quad (10.22)$$

легко увидеть, что из (10.21), (10.22) следует

$$\nabla_\lambda A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A_\nu \quad (10.23)$$

правило ковариантного дифференцирования компонент дифференциальной формы;

- Соответственно для $A_{(p,q)} = A_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\nu_1 \dots \nu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_q} \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\nu_p}} \in \mathcal{T}_{(p,q)}$ действие ковариантной производной $\nabla A_{(p,q)} = B_{(p,q+1)} \in \mathcal{T}_{(p,q+1)}$ дает в компонентах

$$\begin{aligned}
B_{(p,q+1)} &= B_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\nu_1 \dots \nu_p} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \dots dx^{\mu_q} \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\nu_p}} \\
B_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\nu_1 \dots \nu_p} &= \nabla_{\mu} A_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\nu_1 \dots \nu_p} = \partial_{\mu} A_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\nu_1 \dots \nu_p} + \\
&+ \sum_{i=1}^p \Gamma_{\mu \lambda_i}^{\nu_i} A_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\nu_1 \dots \nu_p} - \sum_{j=1}^q \Gamma_{\mu \mu_j}^{\lambda_j} A_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\nu_1 \dots \nu_p}
\end{aligned} \tag{10.24}$$

Удобно говорить, что $B_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\nu_1 \dots \nu_p} = \nabla_{\mu} A_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\nu_1 \dots \nu_p} \equiv A_{\mu_1 \dots \mu_q; \mu}^{\nu_1 \dots \nu_p}$ называется ковариантной производной.

- Преобразование связности

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x) = \Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'}(x') \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} + \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \tag{10.25}$$

неоднородно. Например, в плоском пространстве Минковского в декартовой системе координат $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$, а в криволинейных координатах вообще говоря $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \neq 0$.

Однако, тензор кручения $(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda})$ - преобразуется однородно. Принято считать (эксперимент), что для наблюдаемого пространства-времени

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = 0 \tag{10.26}$$

Связность, согласованная с метрикой. Пусть метрика не меняется при параллельном переносе, т.е.

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} g_{\mu\rho} = 0 \tag{10.27}$$

При отсутствие кручения $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$, используя это уравнение (написав его 3 раза циклически переставляя индексы), легко получить формулу (10.18).

10.4 Лагранжианы и действия

Ковариантная запись лагранжианов и действия очевидна

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi) &\rightarrow \mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi) \\ S[\Phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi) &\rightarrow S[\Phi; g] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi) \end{aligned} \quad (10.28)$$

- **Пример 1.** Скалярное поле $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$

$$\begin{aligned} S[\phi; g] &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu\phi \nabla_\nu\phi - V(\phi)) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu\phi \partial_\nu\phi - V(\phi)) \end{aligned} \quad (10.29)$$

- **Пример 2.** Электромагнитное поле

$$\begin{aligned} \nabla_\mu A_\nu &= \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda \\ \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - A_\lambda (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) \end{aligned} \quad (10.30)$$

т.е. при $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ (например, связность согласована с метрикой) при $\partial_\mu A_\nu \rightarrow \nabla_\mu A_\nu$ по-прежнему $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}$ (дифференциальные формы не зависят от метрики), а поэтому

$$\begin{aligned} S[A; g] &= -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) (\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu) = \\ &= -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} \end{aligned} \quad (10.31)$$

- **Пример 3.** Действие Черна-Саймонса

$$S_{CS} = \int d^3x \epsilon^{ijk} A_i \partial_j A_k = \frac{1}{2} \int A \wedge dA \quad (10.32)$$

вообще не зависит от метрики.

10.5 Тензор энергии-импульса

Как меняется действие при вариации метрики $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ (технически удобнее рассматривать верхние индексы $g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$)? Про-варьируем $S[\Phi; g] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}[\Phi; g]$

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} &= \int d^4x \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta \partial_\lambda g^{\mu\nu} \right) \simeq \\ &\simeq \int d^4x \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right) \delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (10.33)$$

или, другими словами

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S[\Phi; g]}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right) \quad (10.34)$$

который будем называть тензором энергии-импульса. Тензор энергии-импульса очевидно симметричен: $T_{\mu\nu}(x) = T_{\nu\mu}(x)$. Во многих интересных случаях (см., например, действия (10.29), (10.31)) действие не зависит от производных метрики (не содержит нетривиальных ковариантных производных и, стало быть, символов Кристоффеля), и поэтому тензор энергии-импульса целиком определяется первым членом в правой части ф-лы (10.34).

Рассмотрим теперь не произвольную вариацию метрики, а ее изменение при (инфинитезимальной $\delta x^\mu = \xi^\mu(x)$) замене координат

$$\begin{aligned} g'^{\mu'\nu'}(x') &= g^{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} = \\ &= g^{\mu\nu}(x) \left(\delta_\mu^{\mu'} + \frac{\partial \xi^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right) \left(\delta_\nu^{\nu'} + \frac{\partial \xi^{\nu'}}{\partial x^\nu} \right) = \\ &= g^{\mu'\nu'}(x) + g^{\mu'\nu} \frac{\partial \xi^{\nu'}}{\partial x^\nu} + g^{\nu'\mu} \frac{\partial \xi^{\mu'}}{\partial x^\mu} + \dots \end{aligned} \quad (10.35)$$

или

$$\delta_\xi g^{\mu\nu} = \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu - \xi^\lambda \partial_\lambda g^{\mu\nu} = \nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu \quad (10.36)$$

Тогда

$$\delta_\xi \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta_\xi g^{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \nabla^\mu \xi^\nu \quad (10.37)$$

Из инвариантности действия при произвольных $\xi^\mu(x)$ отсюда следует

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (10.38)$$

ковариантное уравнение сохранения тензора энергии-импульса.

- В плоской метрике (точнее при вариации метрики относительно плоского фона) уравнение сохранения

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (10.39)$$

стандартное для тензора энергии-импульса, а сам он является генератором постоянных сдвигов $\partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu = 0$, $\xi^\mu(x) = \xi_0^\mu = \text{const}$. В плоском пространстве-времени Минковского это постоянные сдвиги по времени, инвариантность действия относительно которых приводит к сохранению энергии, и в пространстве - генерирующие закон сохранения импульса (лекция 6). В нетривиальной метрике решения

$$\nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu = 0 \quad (10.40)$$

оставляющие метрику инвариантной $\delta_\xi g^{\mu\nu} = 0$ называются (если они есть!) векторами Киллинга.

- При вариации действия $\delta_\xi S$ мы пренебрегли изменением других полевых переменных Φ , дающих вклад в вариацию действия пропорциональный $\frac{\delta S}{\delta \Phi}$. То есть тензор $T_{\mu\nu}$ сохраняется *только* на уравнениях движения $\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$, и является единственным “универсальным” симметричным тензором 2-го порядка, сохраняющимся на уравнениях движения.
- В теории с динамической метрикой (гравитации) - если считать метрику “полевой” переменной - тензор энергии импульса является источником для гравитационного поля.