12 Общая теория относительности

Мы выяснили, что принцип эквивалентности может указывать на то, что эффекты гравитации могут быть описаны в терминах нетривиальной метрики, и что по крайней мере одной из характеристик, отличающей нетривиальную метрику от метрики пространства Минковского, является ее кривизна.

12.1 Уравнения ОТО

Для того, чтобы получить уравнения гравитационного поля, выберем действие Гильберта

$$S[g] = -\frac{c^3}{16\pi\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}R \tag{12.1}$$

где R - скалярная кривизна. Численный коэффициент перед действием произволен (а выбор знака заранее непонятен!), однако важно, что гравитационная постоянная κ - размерная величина в следующем смысле.

Метрика пространства-времени $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ безразмерна, поэтому кривизна имеет размерность ℓ^{-2} в единицах длины (две производные). Интеграл от кривизны по 4-мерному пространству-времени соответственно имеет размерность квадрата длины ℓ^2, и соответственно $[c]^3\ell^2/\kappa \sim [\hbar]$, или

$$\kappa \sim [c]^3\ell^2/[\hbar] \tag{12.2}$$

В релятивистской системе единиц $c = 1$, а в квантовой $\hbar = 1$, тогда гравитационная постоянная κ сама имеет размерность квадрата длины. Отвечающая ее величине в этих единицах длина Планка

$$\alpha' = \ell_{\mathrm{Pl}}^2 = \frac{\kappa\hbar}{c^3} \approx \frac{(7\cdot 10^{-8})\cdot(1\cdot 10^{-27})}{27\cdot 10^{30}} \approx 2.5\cdot 10^{-66} cm^2 \tag{12.3}$$

т.е. $\ell_{\mathrm{Pl}} \sim 10^{-33}$ см - очень мала[1]. Отметим, что в той же системе единиц ($c = 1$, $\hbar = 1$) константа электромагнитного взаимодействия (электрический заряд) безразмерна, т.е. является числом.

[1]Масштаб, на котором гравитационное взаимодействие становится "квантовым" или сильным.

Проварьируем действие Гильберта

$$
\begin{aligned}
\delta \int d^4x\sqrt{-g}R = \delta \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \\
= \int d^4x \left(\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + \delta\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right)
\end{aligned}
\tag{12.4}
$$

Заметив, что $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta \det g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, получим

$$
\begin{aligned}
\delta \int d^4x\sqrt{-g}R = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \\
+ \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{12.5}
$$

Для последнего “плохого” члена к счастью верно, что

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}W^\mu\right) \\
W^\mu = g^{\nu\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} - g^{\nu\mu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}
\end{aligned}
\tag{12.6}
$$

и его можно отбросить, считая что мы отбрасываем поверхностные члены, где вариации переменных равны нулю. В формуле (12.6) легче всего убедиться в локально-геодезической системе координат, где

$$
\begin{gathered}
\partial_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\lambda g^{\mu\nu} = 0, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 \\
\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}W^\mu\right) = \partial_\mu W^\mu = g^{\nu\lambda}\partial_\mu\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} - g^{\nu\lambda}\partial_\lambda\delta\Gamma^\sigma_{\nu\sigma} = \\
= g^{\nu\lambda}\delta\left(\partial_\mu\Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \partial_\lambda\Gamma^\sigma_{\nu\sigma}\right) \underset{\Gamma=0}{=} g^{\nu\lambda}\delta R_{\nu\lambda}
\end{gathered}
\tag{12.7}
$$

где, напомним,

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} = \\
= \partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}
\end{aligned}
\tag{12.8}
$$

что означает равенство соответствующих *тензоров* в любой системе координат.

Таким образом, из вариации действия Гильберта следует зануление “тензора Эйнштейна”[2] $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$, или же просто

$$
R_{\mu\nu} = 0 \tag{12.9}
$$

[2]См. *принцип Арнольда.*

т.е. уравнения Эйнштейна в пустом пространстве, означаюшие что оно обязано быть риччи-плоским. Если же рассматривается гравитация, взаимодействующая с материей, то вариация полного действия

$$\delta\left(-\frac{c^3}{16\pi\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}R+S[\text{matter};g]\right)=0 \tag{12.10}$$

приводит к уравнениям ОТО

$$R_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi\kappa}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{12.11}$$

где использовано определение $\delta S[\text{matter};g]=\frac{1}{2c}\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ тензора энергии-импульса, как авриации любого действия по внешней метрике.

- Действие Гильберта зависит *не только* от первых производных $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$, и уже этим отличется от канонических действий теории поля, хотя

$$\int d^4x\sqrt{-g}R\simeq\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\rho}\right) \tag{12.12}$$

  (с точностью до поверхностного члена), где в правую часть уже входят только первые производные (но она *не* является интегралом от скалярной плотности!).

- Непротиворечивость уравнений (12.11) предполагает, что

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu}=\tfrac{1}{2}\partial^\nu R \tag{12.13}$$

  вследствие $\nabla^\mu T_{\mu\nu}=0$ сохранения тензора энергии-импульса на уравнениях движения.

- Кривизна окружающего нас пространства *очевидно* мала. Это означает, что в действии Гильберта можно было бы заменить кривизну R её медленно-меняющейся функцией $f(R)=f_0+f_1R+f_2R^2+\ldots$, или

$$S[g]=-\frac{c^3}{16\pi\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\Lambda+R+\alpha' R^2+\ldots\right) \tag{12.14}$$

(на самом деле уже квадратичных по кривизне инвариантов несколько: R^2, $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho}$, есть среди них "топологическая" комбинация в 4-мерии) $R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho}-4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}+R^2$. В них слишком много производных, и возникают они (а также остальные старшие степени), например, как поправки в эффективное действие гравитации из теории струн.

Вариация постоянного члена даёт вклад в уравнения движения

$$R_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\Lambda+\frac{8\pi\kappa}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{12.15}$$

где космологическая постоянная или "энергия вакуума" Λ ($[\Lambda]=\ell^{-2}$) очень мала. На сегодняшний день считается, что

$$\Lambda<0,\quad L\sim\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sim 3\cdot 10^{28}cm,\qquad (L/\ell_{\rm Pl})^2\sim 10^{123} \tag{12.16}$$

а соответствующая плотность вакуумной энергии

$$\rho_{\rm vac}=\frac{\varepsilon_{\rm vac}}{c^2}\sim\frac{c^2}{\kappa}|\Lambda|\sim 10^{-29}g/cm^3 \tag{12.17}$$

т.е. этот член может начинать давать вклад лишь на очень больших расстояниях - масштабы галактик или скоплений галактик. Таким образом, если во все это верить, на больших расстояниях Вселенная ($R\approx-\Lambda$) похожа на пространство постоянной кривизны.

В остальном - на более разумных, в том числе наблюдаемых расстояниях, кривизна пространства-времени согласно ОТО определяется наличием материи.

12.2 Тензор энергии-импульса материи

Вернемся к системе частиц в произвольной метрике с действием $S[X;g]=-mc\int\sqrt{g_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu}$, вариация которого по метрике дает

$$\begin{aligned}\delta S[X;g]&=-mc\int\frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu}}\delta g_{\mu\nu}(X)dX^\mu dX^\nu=\\&=-\frac{1}{2c}\int d^4x\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}(x)mc^2\int\frac{dX^\mu dX^\nu}{ds}\delta^{(4)}(x-X)=\\&=\frac{1}{2c}\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}(x)mc^2\int\frac{dX_\mu dX_\nu}{ds}\delta^{(4)}(x-X)\end{aligned} \tag{12.18}$$

т.е.

$$T_{\mu\nu} = mc^2 \int \frac{dX_\mu dX_\nu}{ds} \delta^{(4)}(x - X) = mc^2 \int ds U_\mu U_\nu \delta^{(4)}(x - X) \qquad (12.19)$$

где $U^\mu = dX^\mu/ds$ - 4-скорость. В собственной системе отсчета $ds = cdT$, $X^\mu = (cT, \mathsf{0})$, поэтому

$$T_{\mu\nu} = mc^2 \int ds U_\mu U_\nu \delta(ct - cT) \delta^{(3)}(\mathsf{x}) = mc\delta^{(3)}(\mathsf{x}) U_\mu U_\nu \frac{ds}{dT} \qquad (12.20)$$

а для системы невзаимодействующих частиц надо заменить $mc\delta^{(3)}(\mathsf{x}) \to \sum_J m_J c \delta^{(3)}(\mathsf{x} - \mathsf{X}_J) = c\rho(\mathsf{x})$. При этом компонента $T_{00} = c^2 \rho(\mathsf{x}) = \varepsilon(\mathsf{x})$ представляет собой просто плотность энергии системы. Для макроскопических тел тензор энергии-импульса любят записывать в виде

$$T_{\mu\nu} = (p + \varepsilon) U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu} \qquad (12.21)$$

где p - давление.

12.3 Закон Ньютона

Вычислим нерелятивистский предел уравнений ОТО с помощью подстановки $g_{00} = 1 + \frac{2\Phi(\mathsf{x})}{c^2}$ в $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi\kappa}{c^4} T_{\mu\nu}$, или

$$R^\mu_\nu = \frac{8\pi\kappa}{c^4} \left(T^\mu_\nu - \tfrac{1}{2} \delta^\mu_\nu T \right) \qquad (12.22)$$

Для покоящейся массивной частицы единственная нетривиальная компонента $T^0_0 = Mc^2 \delta^{(3)}(\mathsf{x})$, так что

$$R^0_0 = \frac{4\pi\kappa}{c^4} T^0_0 = \frac{4\pi\kappa M}{c^2} \delta^{(3)}(\mathsf{x}) \qquad (12.23)$$

Будем интересоваться в левой части равенства тоже только членами порядка c^{-2} в $R_{00} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} - \partial_0 \Gamma^\mu_{0\mu} + \ldots$, т.е. происходящими из пространственных производных $\partial_i g_{00}$ (все остальные - более высокого порядка малости). Тогда для символов Кристоффеля

$$\begin{gathered} \Gamma^i_{00} = -\tfrac{1}{2} g^{ii} \partial_i g_{00} + o\left(\frac{1}{c^2}\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + o\left(\frac{1}{c^2}\right) \\ \Gamma^0_{00} = o\left(\frac{1}{c^3}\right), \qquad \Gamma \cdot \Gamma = o\left(\frac{1}{c^4}\right) \end{gathered} \qquad (12.24)$$

и в уравнении для кривизны остается $R_0^0 = \frac{1}{c^2}\Delta\Phi$, где $\Delta = \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial^2}{dx_i^2}$ - оператор Лапласа в 3-х пространственных измерениях. Таким образом

$$\Delta\Phi = 4\pi\kappa M\delta^{(3)}(\mathsf{x}), \qquad \Phi = -\frac{\kappa M}{|\mathsf{x}|} \tag{12.25}$$

и мы получили нерелятивистский закон тяготения Ньютона.