14 Геометрия в ОТО и сингулярности

14.1 Геометрия за горизонтом

Фиктивная сингулярность метрики Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_G}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_G}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{14.1}$$

при $r = r_G$ устраняется выбором подходящей системы отсчета. Эта система отсчета не может однако оставаться статичной, а должна быть связана с *падающим* наблюдателем. Можно, например, перейти к координатам $(t, r) \to (T, R)$ (при тех же углах (θ, ϕ)), таким что

$$\begin{aligned} dT &= dt + \frac{dr}{c}\frac{f(r)}{1 - \frac{r_G}{r}} \\ dR &= cdt + \frac{dr}{f(r)\left(1 - \frac{r_G}{r}\right)} \end{aligned} \tag{14.2}$$

с некоторой (пока нефиксированной функцией $f(r)$, т.е.

$$ds^2 = \frac{1 - \frac{r_G}{r}}{1 - f^2}\left(c^2 dT^2 - f^2 dR^2\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{14.3}$$

и выбрав $f = \sqrt{r_G/r}$, чтобы

$$R - cT = \int dr \frac{1 - f(r)^2}{f(r)\left(1 - \frac{r_G}{r}\right)} = \int dr \sqrt{\frac{r}{r_G}} = \frac{2}{3} r_G \left(\frac{r}{r_G}\right)^{3/2} \tag{14.4}$$

получаем метрику “падающего наблюдателя”

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dT^2 - \frac{r_G}{r(T,R)} dR^2 - r^2(T,R)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ r(T,R) &= r_G^{1/3}\left(\frac{3}{2}(R - cT)\right)^{2/3} \end{aligned} \tag{14.5}$$

определенную всюду при $R - cT > 0$. Единственная неприятность заключается в том, что преобразование координат (14.2) неаналитично, содержит дробные степени и т.п.

- В отличие от метрики в координатах Шварцшильда (t, r) в метрике (14.5) нет никакой сингулярности при $r(T, R) = r_G$. Сингуляросить возникает лишь “в будущем” при $R - cT \sim r^{3/2} = 0$, и эта сингулярность неустранима.

- Уравнение радиальных световых сигналов $ds^2 = 0$ дает

$$c\frac{dT}{dR} = \pm\sqrt{\frac{r_G}{r(T, R)}} \tag{14.6}$$

  При $r(T, R) < r_G$ оба луча светового конуса упираются в настоящую сингулярность при $r(T, R) = 0$, т.е. даже свет из-под гравитационного радиуса не уходит вовне. При этом говорят, что внутренность сферы Шварцшильда отделена от внешности *горизонтом* событий: в частности реальная сингулярность при $r(T, R) = 0$ находится для внешнего наблюдателя за горизонтом, т.е. ненаблюдаема.

Безусловно выбор “падающих” координат (T, R) достаточно произволен - например более симметрично метрика выглядит в координатах Крускала, где $(r = r(u, v))$

$$\begin{gathered} ds^2 = \frac{4r_G^3}{r}\exp(-r/r_G)\left(dv^2 - du^2\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_G} - 1\right)\exp(r/r_G) \end{gathered} \tag{14.7}$$

а световой конус $ds^2 = 0$ всегда имеет единичный наклон $\frac{dv}{du} = \pm 1$. Координаты Крускала однако описывают гораздо большее “пространство-время”, чем координаты (t, r) или даже (T, R): в них все “удваивается”. Поверхности $r(u, v) = \mathrm{const}$ являются вообще говоря ветвями гипербол, а сфера Шварцшильда $r(u, v) = r_G$ делит (u, v)-плоскость на 4 сектора, из которых один описывается координатами (t, r), другой - отвечает продолжению этой геометрии под гравитационный радиус, а оставшиеся два - в некотором смысле “лишние”. Таким образом, вопрос глобального доопределения геометрии Шварцшильда неоднозначен и зависит, в частности, от выбора координат.

14.2 Горизонты и сингулярности

Таким образом, для геометрии Шварцшильда гравитирующего тела было установлено, что

- Метрика в системе отсчета удаленного неподвижного наблюдателя является "геодезически неполной" и описывает не все четырехмерное пространство-время.
- Сингулярность компонент метрики на границе карты Шварцшильда при $r = r_G$ является нефизической и устраняется заменой координат.

При переходе в падающую систему отсчета наблюдатель проникает в область за пределами карты Шварцшильда

- которая отделена от системы отсчета неподвижного наблюдателя *горизонтом* событий, т.е. даже световые сигналы из-под горизонта не выходят наружу;
- метрика которой содержит *настоящую* сингулярность, в которой развивают особенности инварианты кривизны.

По поводу сингулярностей современная наука не может сказать ничего определенного. Наиболее распространенными и понимаемыми точками зрения являются:

- Это плохо.
- Сингулярности - неизбежное следствие классической теории гравитации в форме ОТО для метрики с сигнатурой Минковского. Возможно (!?) сингулярности "регуляризуются" в гипотетической квантовой теории гравитации.
- В классической теории гравитации разумное требование - не допускать т.н. *голых* сингулярностей, т.е. реальных сингулярностей не скрытых за горизонтами. Решение Шварцшильда в ОТО удовлетворяет этому ослабленному требованию.

Вопрос о сигнатуре метрики является чрезвычайно существенным, так как известны примеры, когда решения уравнений гравитации в евклидовой сигнатуре приводят к хорошим многообразиям без реальных сингулярностей.

14.3 Гравитационый инстантон Егучи-Хансона

Для сравнения изучим случай, когда глобальная геомерия пространства-времени восстанавливается по решению уравнений гравитации до конца. Рассмотрим метрику 4-мерного евклидова пространства (евклидова сигнатура отвечает, например, мнимому времени, $c = 1$)

$$ds^2 = dr^2 + r^2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2 \tag{14.8}$$

где введены

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{1}{r^2}\left(xdt - tdx + ydz - zdy\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sin\psi d\theta - \cos\psi\sin\theta d\phi\right) \\
\sigma_2 &= \frac{1}{r^2}\left(ydt - tdy + zdx - xdz\right) = -\tfrac{1}{2}\left(\cos\psi d\theta + \sin\psi\sin\theta d\phi\right) \\
\sigma_3 &= \frac{1}{r^2}\left(zdt - tdz + xdy - ydx\right) = \tfrac{1}{2}\left(d\psi + \cos\theta d\phi\right)
\end{aligned} \tag{14.9}$$

удовлетворяющие $d\sigma_1 = 2\sigma_2\wedge\sigma_3$, $d\sigma_2 = 2\sigma_3\wedge\sigma_1$, $d\sigma_3 = 2\sigma_1\wedge\sigma_2$ (формы Маурера-Картана на $S^3 \simeq SU(2)$). Углы Эйлера ($0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le \psi \le 4\pi$):

$$\begin{aligned}
x + iy &= r\cos\frac{\theta}{2}\exp\frac{i}{2}(\psi + \phi) \\
z + it &= r\sin\frac{\theta}{2}\exp\frac{i}{2}(\psi - \phi)
\end{aligned} \tag{14.10}$$

параметризуют сферу S^3 радиуса $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.

Рассмотрим теперь метрику в сферических координатах

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{R^4}{r^4}} + r^2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left(1 - \frac{R^4}{r^4}\right)\sigma_3^2\right) \tag{14.11}$$

При $R = 0$ метрика (14.11) превращается в метрику евклидова пространства $\mathbb{R}^4$, т.е. при $r \gg R$ пространство (14.11) асимптотически плоское и евклидово. Кроме того, утверждается, что:

- Метрика (14.11) является Риччи-плоской $R_{\mu\nu} = 0$ т.е. решением евклидовой гравитации в пустоте. Более того, метрика (14.11) является самодуальной, т.е. удовлетворяет уравнениям

$$R^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho} = \pm\tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\alpha\beta\lambda\rho} \tag{14.12}$$

Уравнения самодуальности, будучи свернуто по паре индексов

$$R^{\nu}{}_{\rho} = R^{\mu\nu}{}_{\mu\rho} = \pm\tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\alpha\beta\mu\rho} = 0 \tag{14.13}$$

приводит автоматически к выполнению уравнений Эйнштейна в пустоте, вследствие тождеств, которым удовлетворяет тензор кривизны. Решения уравнений (14.12) называются гравитационными инстантонами[1], а метрика (14.11) представляет собой простейший пример инстантона Егучи-Хансона.

- Аналогично центрально-симметричному анзацу, приводящему к решению Шварцшильда, решение Егучи-Хансона находится подстановкой вида

$$ds^2 = a(r)^2dr^2 + r^2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + b(r)^2\sigma_3^2\right) \tag{14.14}$$

в уравнения (14.12), которые (все!) удовлетворяются при $a \cdot b = 1$ и $b + rb' = a(2 - b^2)$, т.е.

$$rb' = 2\left(\frac{1}{b} - b\right) \tag{14.15}$$

что далее тривиально интегрируется, приводя к (14.11), с константой интегрирования R, имеющей смысл размера инстантона.

- Метрика (14.11) является Кэлеровой, т.е. может быть записана в виде

$$ds^2 = \sum_{I,\bar{J}=1,2} g_{I\bar{J}}dz^I d\bar{z}^{\bar{J}} \tag{14.16}$$

так что вещественная 1-форма

$$\varpi = \frac{i}{2}\sum_{I,\bar{J}=1,2} g_{I\bar{J}}dz^I \wedge d\bar{z}^{\bar{J}}, \qquad \overline{\varpi} = \varpi \tag{14.17}$$

[1] Их удобнее писать в тетрадном формализме $g_{\mu\nu}(x) = e^a_\mu e_{a,\nu}$, где они сводятся к уравнениям самодуальности на спиновую связность $\omega_{ab} = \pm\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\omega_{cd}$, входящую в формулы $de_a + \omega_{ab} \wedge e_b = 0$ и $R_{ab} = d\omega_{ab} + \omega_{ac} \wedge \omega_{cb}$.

замкнута $d\varpi = 0$, т.е. локально $\varpi = \partial\bar{\partial}K$ ($\partial = \sum_{I=1,2} dz^I \partial/\partial z^I$, $\bar{\partial} = \sum_{\bar{I}=1,2} dz^{\bar{I}} \partial/\partial z^{\bar{I}}$, $d = \partial + \bar{\partial}$). Для метрики (14.11) кэлеров потенциал имеет вид

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{\rho^4 + R^4} + R^2 \log \frac{\rho^2}{R^2 + \sqrt{\rho^4 + R^4}} \\ \rho^2 &= \sqrt{r^4 - R^4} = |z^1|^2 + |z^2|^2 = |x + iy|^2 + |z + it|^2 \end{aligned} \tag{14.18}$$

- Сингулярность при $r = R$, $\rho = 0$ является координатным артефактом, но только при отождествлении

  $$(x, y, z, t) \leftrightarrow (-x, -y, -z, -t) \tag{14.19}$$

  т.е. в пределе $R \to 0$ возникает не Евклидово пространство $\mathbb{R}^4$, а орбифолд $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$.

Метрику (14.11) определена *глобально* на тотальном пространстве кокасательного расслоения $T^*(S^2)$. В окрестности "сингулярности" $r \approx R$ удобно ввести новую координату $u^2 = r^2\left(1 - R^4/r^4\right)$, в которой

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{du^2}{\left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^2} + u^2\sigma_3^2 + r^2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) = \\ &\underset{r\approx R}{\approx} \frac{1}{4}du^2 + \frac{1}{4}u^2\left(d\psi + \cos\theta d\phi\right)^2 + \frac{R^2}{4}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \end{aligned} \tag{14.20}$$

При фиксированных (θ, ϕ) - точке на двумерной сфере S^2 радиуса $R/2$ - первые два слагаемых этого выражения представляет собой просто метрику $ds^2 = \frac{1}{4}\left(du^2 + u^2 d\psi^2\right)$ на плоскости, заданной для каждой точки сферы, если $0 \le \psi \le 2\pi$ (а не 4π!) - устранимая сингулярность типа "болт". Таким образом, при $r \to \infty$ пространство инстантона устроено как

$$S^3/\mathbb{Z}_2 \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3) \simeq \mathbb{RP}^3 \tag{14.21}$$

и является лишь *асимптотически* локально-евклидовым.