Математические основы естествознания

ЗАДАЧИ К ЗАЧЕТУ, МОДУЛЬ 3

1. а) Определим поле $A_{\mu\nu}$ условием $A_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Является ли так определенное $A_{\mu\nu}$ ковариантным тензором второго ранга относительно общекоординатных преобразований? Ответ обосновать.

   б) Пусть A_μ, B_μ – два векторных поля. Будет ли их поточечное произведение $A_\mu B_\nu$ тензорным полем? Ответ обосновать.

2. Рассмотрим стереографическую проекцию единичной сферы, т.е. проекцию из северного полюса сферы на плоскость экватора с координатами x, y.

   а) Выразить метрику сферы в координатах x, y.

   б) Что представляют из себя образы геодезических на сфере при стереографической проекции?

3. Косинус угла θ между векторами $\vec{A}$, $\vec{B}$ (в одной и той же точке) с контравариантными компонентами A^μ и B^μ в некоторых криволинейных координатах с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ можно определить как

$$\cos\theta = \frac{A_\mu B^\mu}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|}$$

   Доказать, что вейлевские преобразования метрики (т.е. преобразования вида $g_{\mu\nu} \to \rho^2 g_{\mu\nu}$ с некоторой, вообще говоря, зависящей от координат и не обращающейся в нуль функцией ρ) сохраняют углы.

4. На верхней полуплоскости со стандартными координатами x, y $(y > 0)$ введем метрику

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

   Полученное пространство назовем $\mathbb{H}$.

   а) Вывести уравнения геодезических и описать все геодезические в пространстве $\mathbb{H}$.

   б) Найти компоненты тензора Римана в координатах x, y и скалярную кривизну пространства $\mathbb{H}$.

5. В пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$ получить уравнение геодезической кривой $x^\mu(\tau)$ с произвольным параметром τ на ней (не обязательно совпадающим с длиной геодезической).

6. Символом ∇_μ обозначается ковариантная производная тензорных полей.

   а) Доказать, что если φ – скалярное поле, то $\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi = \nabla_\nu \nabla_\mu \varphi$.

   б) Для тензорного поля второго ранга $B^{\mu\nu}$ доказать, что $\nabla_\mu \nabla_\nu B^{\mu\nu} = \nabla_\nu \nabla_\mu B^{\mu\nu}$.

в) Для антисимметричного тензорного поля второго ранга $A^{\mu\nu}$ показать, что

$$\nabla_\nu A^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_\nu\Big(\sqrt{|g|}\,A^{\mu\nu}\Big)$$

7. Рассмотрим теорию векторного поля A_μ в искривленном пространстве-времени размерности D с метрикой $g_{\alpha\beta}$:

$$S = \frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{|g|}\,d^Dx, \quad \text{где} \quad F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu.$$

а) Написать уравнения движения.

б) Найти тензор энергии-импульса поля A_μ и проверить его ковариантное сохранение на уравнениях движения.

в) Проверить, что действие теории инвариантно относительно преобразований вида $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \nabla_\mu\,\varepsilon(x)$, где $\varepsilon(x)$ – произвольная функция.

8. Рассмотрим движение пробной частицы в поле радиально симметричной черной дыры (в метрике Шварцшильда):

$$ds^2 = \Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

а) Доказать, что сохраняются компоненты 4-импульса p_t и p_φ.

б) Какую минимальную начальную скорость нужно сообщить частице, начинающей движение из точки с радиальной координатой $r = R$, чтобы она освободилась от поля черной дыры и улетела на бесконечность?

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

(подробное письменное решение *всех* задач из этого списка дает право на зачет-автомат независимо от сдачи задач листков 6-9)

1.* Рассмотрим теорию вещественного скалярного поля φ в двумерном *евклидовом* пространстве с нетривиальной метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$S = \frac{1}{2}\int\Big(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + qR\varphi\Big)\sqrt{|g|}\,d^2x$$

Здесь R – скалярная кривизна метрики, а q – параметр. Найти тензор энергии-импульса поля φ и проверить его ковариантное сохранение на уравнении движения.

2.* Рассмотрим движение пробной частицы в поле радиально симметричной черной дыры (в метрике Шварцшильда):

$$ds^2 = \Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

а) Получить дифференциальное уравнение первого порядка для экваториальных орбит (для r как функции φ).

б) В низшем порядке по M/r вычислить угловое смещение перигелия кеплеровской орбиты, предсказываемое общей теорией относительности.

3.* Рассмотрим теорию, в которой динамическим полем является метрика $g_{\alpha\beta}$ на замкнутом 4-мерном многообразии M^4, и действие имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{M^4} \left(R^2 - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \right) \sqrt{|g|}\, d^4x$$

где $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, $R_{\mu\nu}$, R – тензор Римана, тензор Риччи и скалярная кривизна. Вывести уравнения движения.