Задачи про коники

Определение 1. *Коника* (или *кривая второго порядка*) — это кривая на проективной плоскости, заданная уравнением степени два, то есть уравнением вида

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0. \tag{1}$$

Задача 1. Докажите, что через любые пять точек на плоскости проходит хотя бы одна коника.

Определение 2. Коника, заданная уравнением (1), называется *невырожденной*, если многочлен

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2$$

неприводим, то есть не раскладывается на линейные множители.

Задача 2. Даны пять точек на плоскости в общем положении (то есть никакие три не лежат на одной прямой). Докажите, что через них проходит ровно одна коника, причём невырожденная.

Определение 3. *Двойственной коникой* Q^* к данной конике Q называется множество точек на двойственной проективной плоскости, соответствующих касательным прямым к Q.

Задача 3. Проверьте, что двойственная коника к невырожденной конике Q задаётся уравнением степени два. Найдите коэффициенты этого уравнения, если Q задана уравнением (1).

Задача 4. Коники можно отождествить с точками пятимерного проективного пространства $\mathbb{P}^5$: конике, заданной уравнением (1), соответствует точка $(a : b : c : d : e : f) \in \mathbb{P}^5$. Докажите, что при таком отождествлении

(а) множество всех коник, проходящих через даную точку — это гиперплоскость в $\mathbb{P}^5$;

(б) множество коник, касающихся данной прямой — это квадрика в $\mathbb{P}^5$ (то есть гиперповерхность, заданная уравнением степени два);

(в) множество коник, касающихся данной коники — это гиперповерхность в $\mathbb{P}^5$, заданная уравнением степени шесть.

Задача 5. Пусть $k = 0, \ldots, 5$. Сколько невырожденных коник касается k данных прямых и проходит через $5 - k$ данных точек?

Задача 6. Сколько невырожденных коник касается данной коники и проходит через 4 данные точки?

Задача 7. Пусть $V \subset \mathbb{P}^5$ — множество всех *двойных прямых*, то есть вырожденных коник, заданных уравнением вида $(px + qy + rz)^2 = 0$.

(а) Докажите, что гиперповерхности из пунктов б) и в) задачи 4 содержат V.

(б) Докажите, что V совпадает (с точностью до линейной замены координат) с *поверхностью Веронезе*, то есть образом плоскости $\mathbb{P}^2$ при вложении Веронезе:

$$c_2 : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}(S^2(\mathbb{C}^3)); \quad c_2 : L \mapsto S^2(L).$$