

Динамика рациональных функций

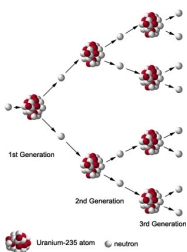
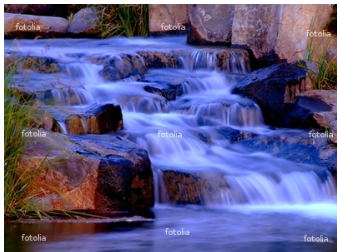
В.А. Тиморин*

*Факультет Математики

Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики

Севастополь, 7 мая 2012 г.

Динамические системы



Модель роста популяции (P.F. Verhulst, R. May)



$$x_{n+1} = r \cdot x_n(1 - x_n),$$

где x_n = размер популяции в момент времени n (через n лет).

Другими словами, рассматриваются итерации функции

$$f(x) = rx(1 - x).$$

Теория итераций

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность

x

Теория итераций

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность

$$f(x)$$

Теория итераций

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность

$$f(f(x))$$

Теория итераций

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность

$$f(f(f(x)))$$

Теория итераций

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность

$$f(f(f(f(x))))$$

Теория итераций

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность

$$f(f(f(f(f(x))))))$$

Теория итераций: вопросы

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), f(f(f(f(x))))$, и т.д.

- Что делает эта последовательность?
- Как ее поведение зависит от x ?
- Как ее поведение зависит от f ?

Теория итераций: вопросы

Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), f(f(f(f(x))))$, и т.д.

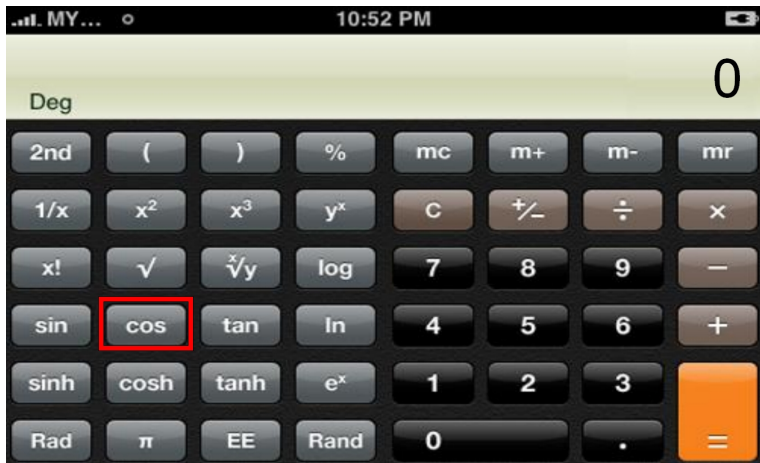
- Что делает эта последовательность?
- Как ее поведение зависит от x ?
- Как ее поведение зависит от f ?

Теория итераций: вопросы

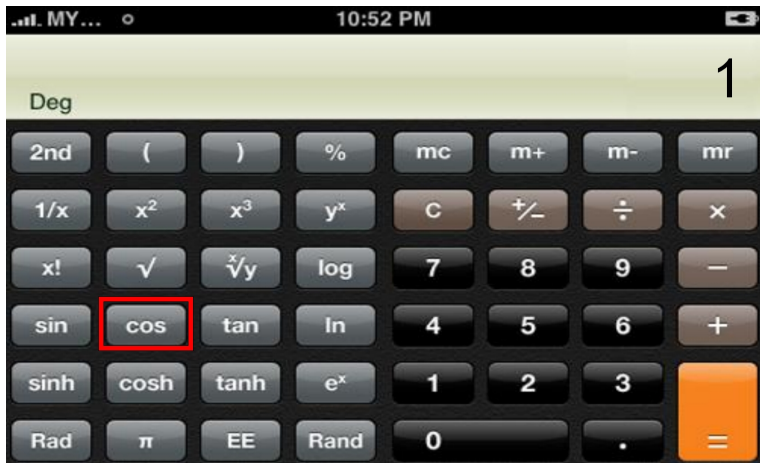
Рассмотрим функцию f , и образуем последовательность $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), f(f(f(f(x))))$, и т.д.

- Что делает эта последовательность?
- Как ее поведение зависит от x ?
- Как ее поведение зависит от f ?

Теория итераций: практика



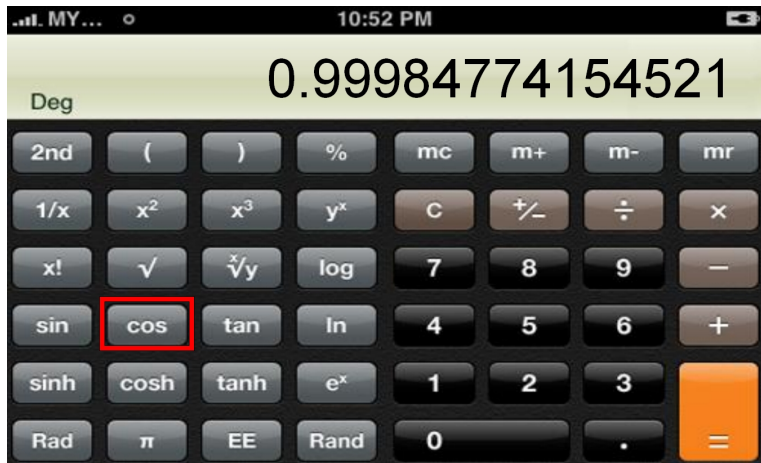
Теория итераций: практика



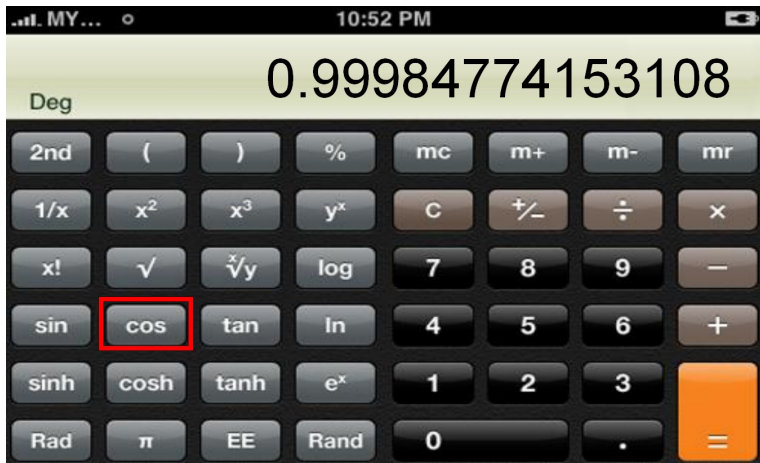
Теория итераций: практика



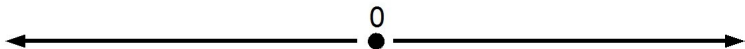
Теория итераций: практика



Теория итераций: практика



Пример: $f(x) = 2x$



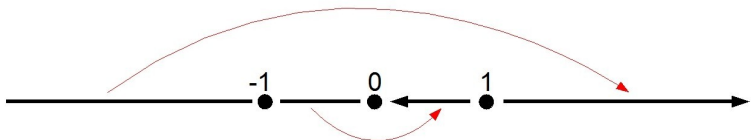
$0.015625 \mapsto 0.03125 \mapsto 0.0625 \mapsto 0.125 \mapsto 0.25 \mapsto 0.5 \mapsto$

$1 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 8 \mapsto 16 \mapsto 32 \mapsto 64 \mapsto 128 \mapsto 256 \mapsto 512 \mapsto 1024$

Точка 0 неподвижна. Все остальные точки уходят на
бесконечность.

Пример: $f(x) = x^2$

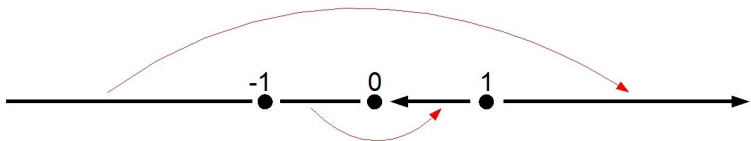
$0 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto 1, \quad -1 \mapsto 1$



- Точки в $(-1, 1)$ стремятся к 0.
- Точки вне $[-1, 1]$ стремятся к бесконечности.

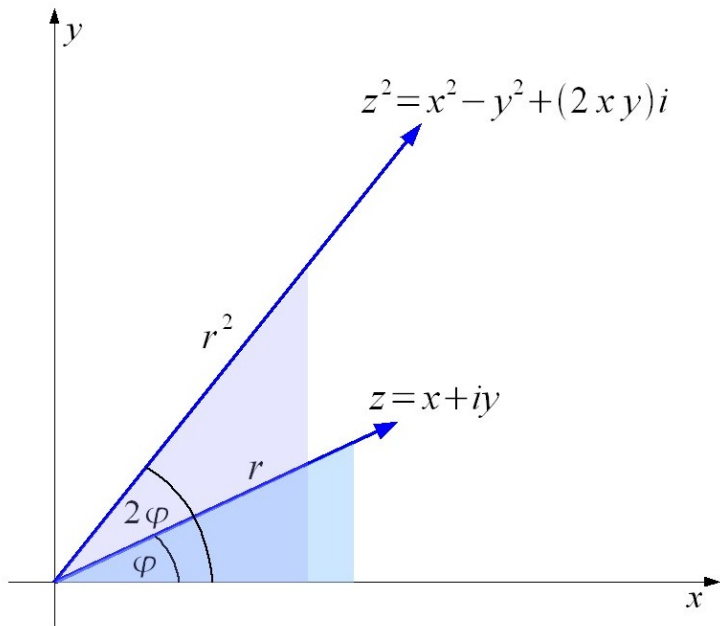
Пример: $f(x) = x^2$

$0 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto 1, \quad -1 \mapsto 1$

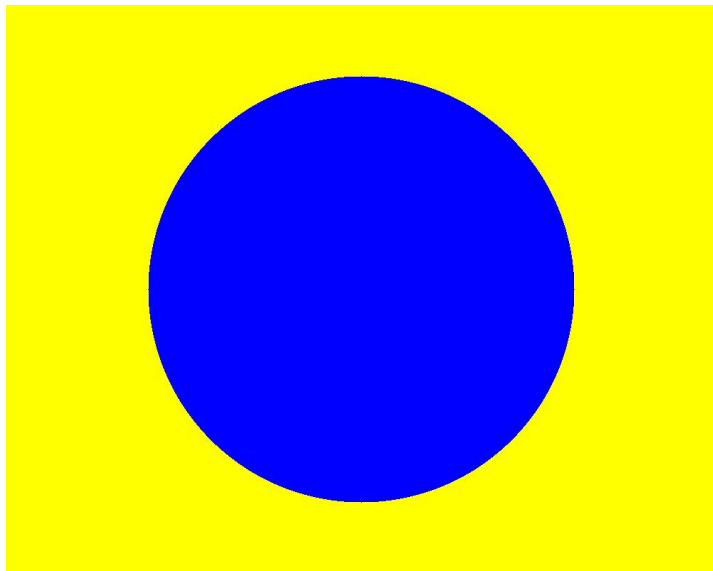


- Точки в $(-1, 1)$ стремятся к 0.
- Точки вне $[-1, 1]$ стремятся к бесконечности.

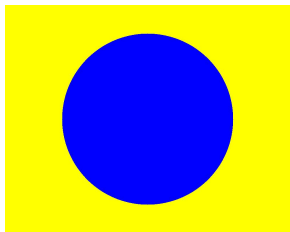
Пример: $f(z) = z^2$, комплексные числа



Пример: $f(z) = z^2$, комплексные числа

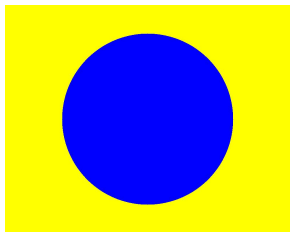


Пример: $f(z) = z^2$, комплексные числа



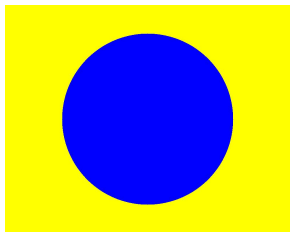
- Точки внутри единичного диска стремятся к 0.
- Точки вне единичного диска стремятся к ∞ .
- Точки на единичной окружности остаются на ней все время.

Пример: $f(z) = z^2$, комплексные числа



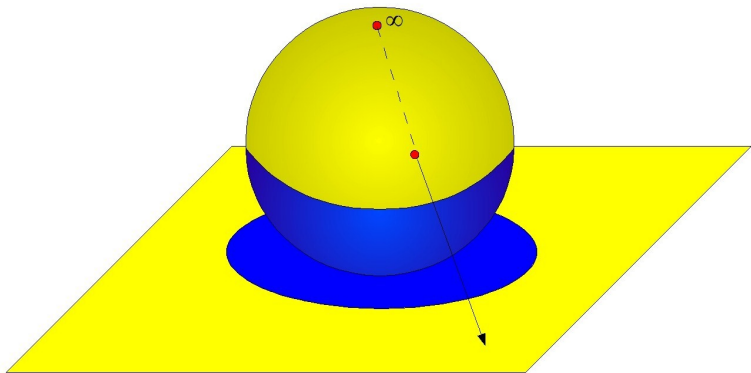
- Точки внутри единичного диска стремятся к 0.
- Точки вне единичного диска стремятся к ∞ .
- Точки на единичной окружности остаются на ней все время.

Пример: $f(z) = z^2$, комплексные числа



- Точки внутри единичного диска стремятся к 0.
- Точки вне единичного диска стремятся к ∞ .
- Точки на единичной окружности остаются на ней все время.

Сфера



При помощи стереографической проекции, плоскость комплексных чисел, пополненная точкой на бесконечности, отождествляется со сферой.

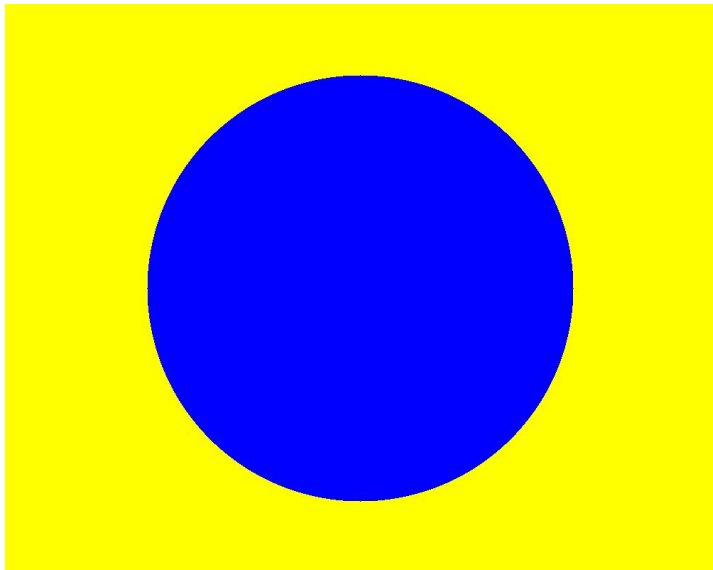
Рациональные функции

Мы рассматриваем **рациональные функции** комплексного переменного (т.е. отношения многочленов) как отображения из сферы в себя.

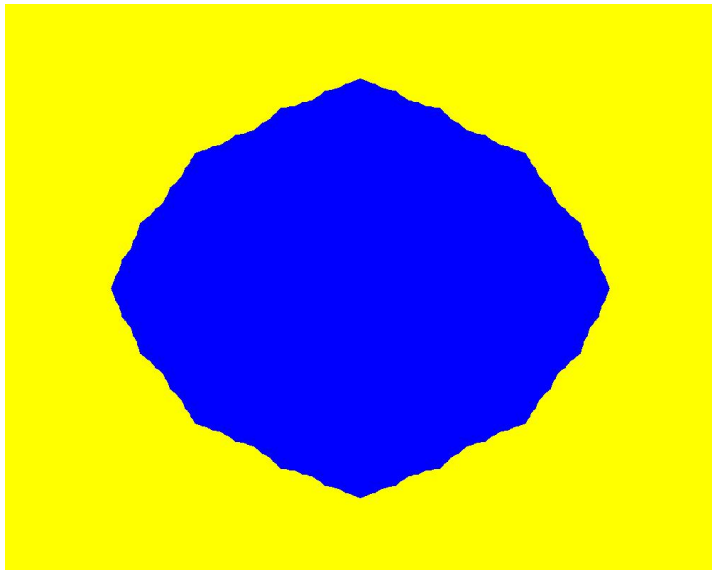
Пример

$$R(z) = \frac{2z^2 - 3}{z^2 - 1}, \quad \pm 1 \mapsto \infty, \quad \infty \mapsto 2.$$

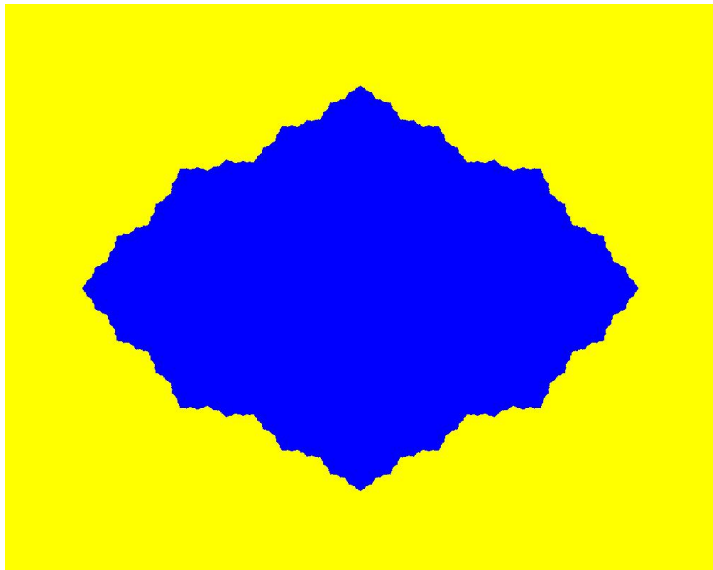
$$f(z) = z^2$$



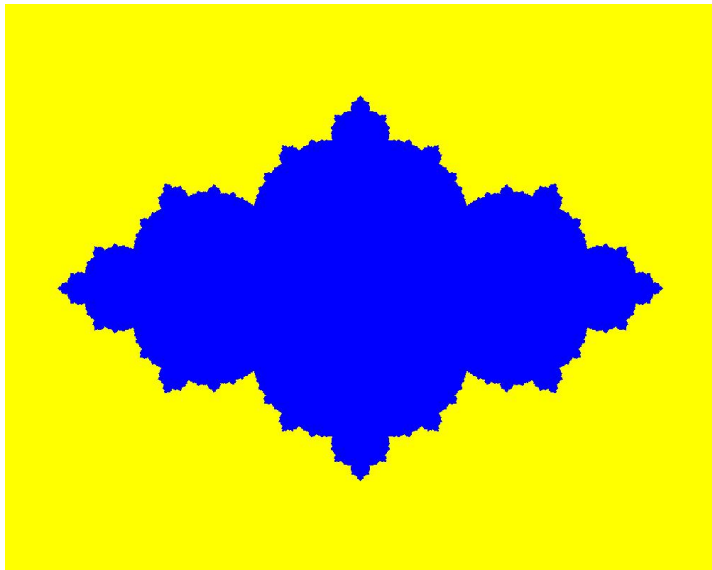
$$f(z) = z^2 - 0.2$$



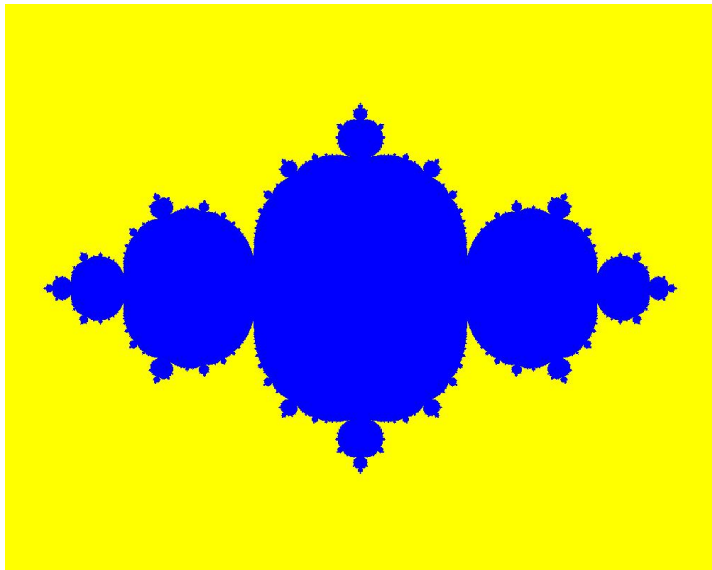
$$f(z) = z^2 - 0.4$$



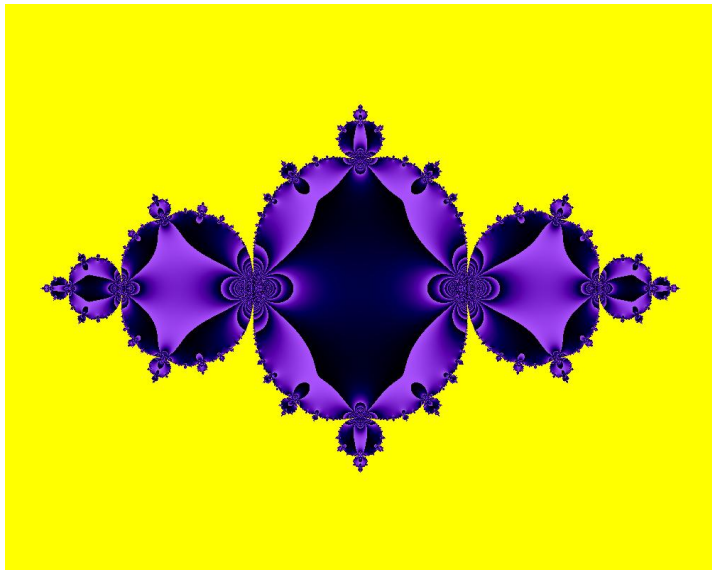
$$f(z) = z^2 - 0.6$$



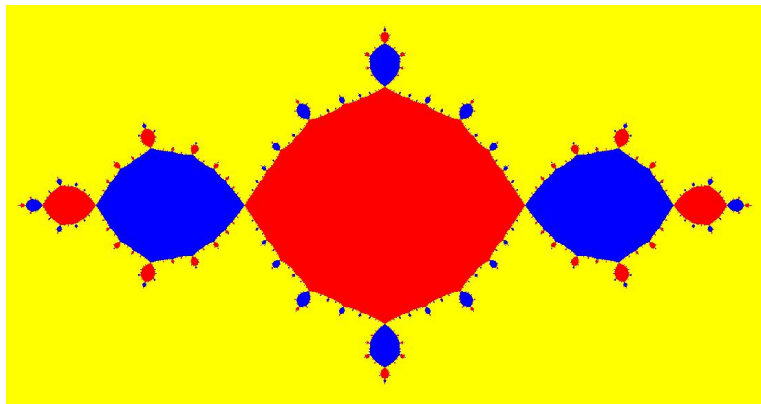
$$f(z) = z^2 - 0.73$$



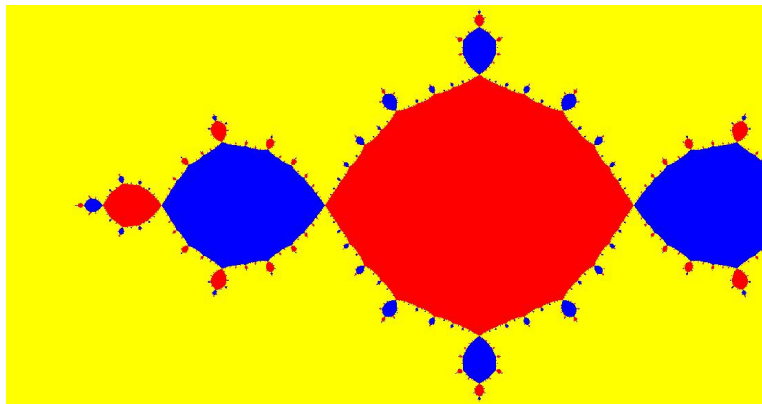
Параболическая бифуркация: $f(z) = z^2 - 0.75$



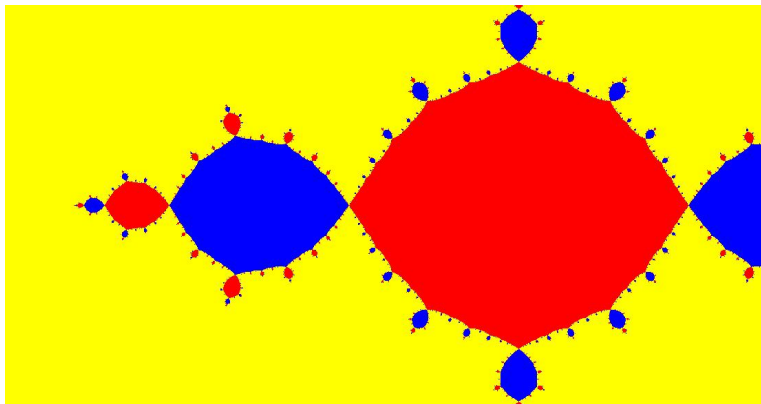
Базилика: $f(z) = z^2 - 1$



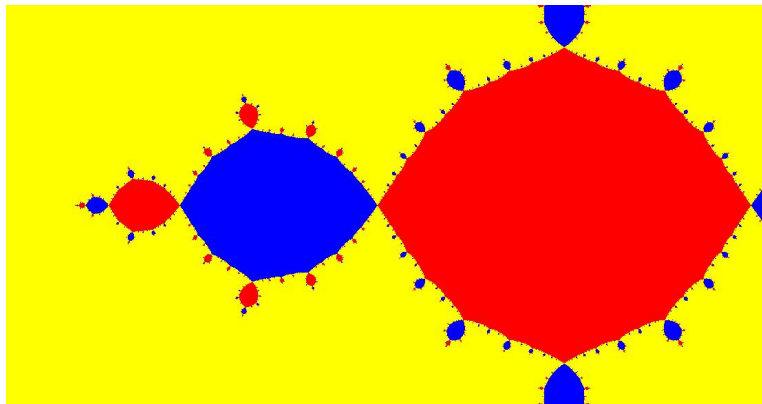
$$f(z) = z^2 - 1$$



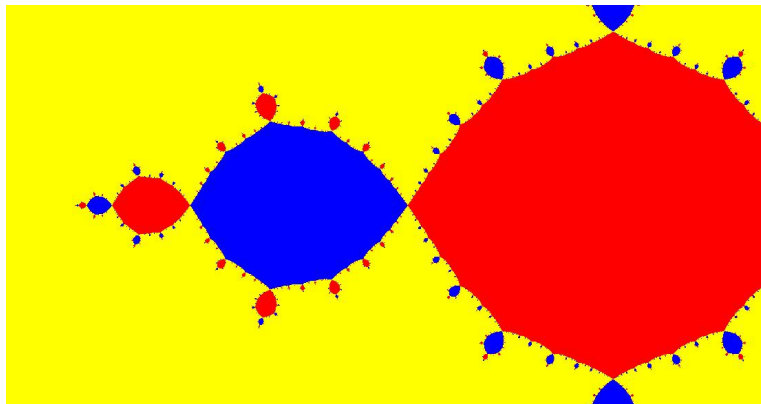
$$f(z) = z^2 - 1$$



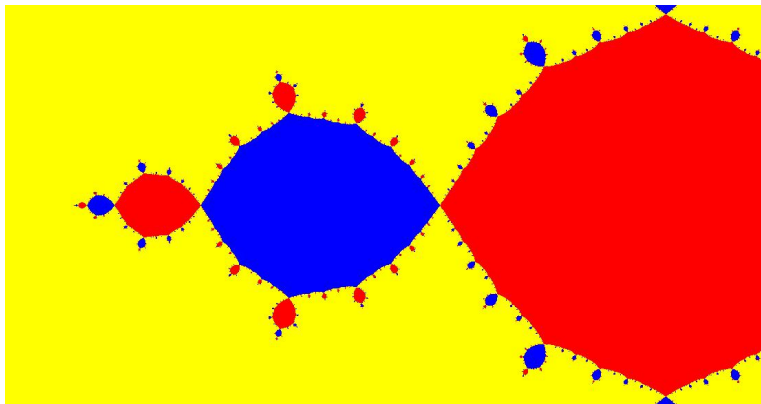
$$f(z) = z^2 - 1$$



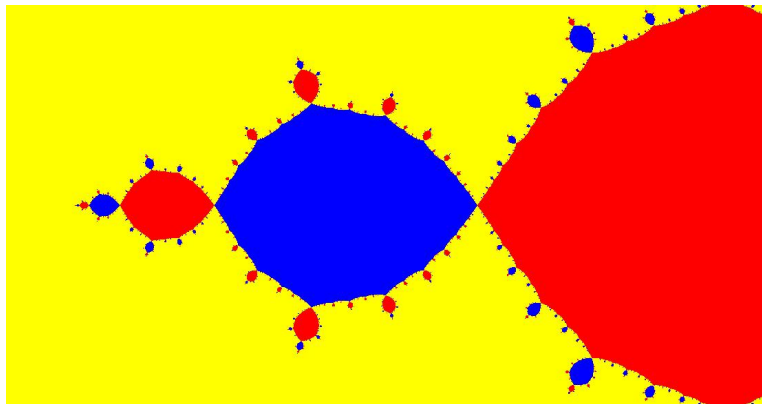
$$f(z) = z^2 - 1$$



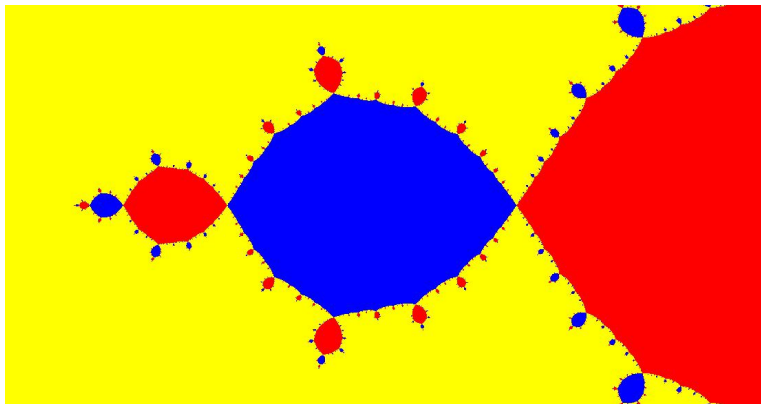
$$f(z) = z^2 - 1$$



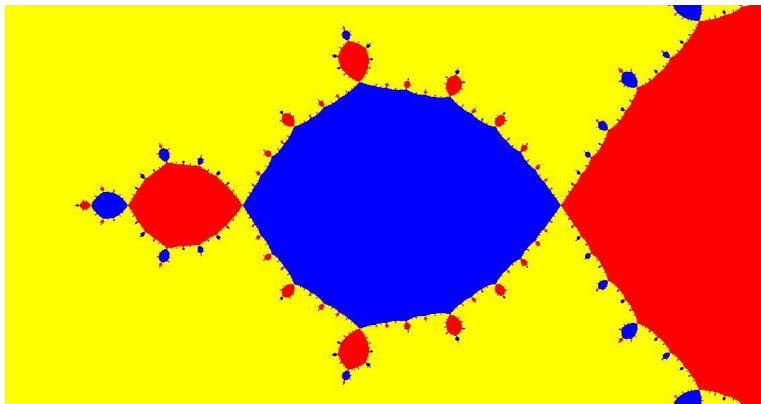
$$f(z) = z^2 - 1$$



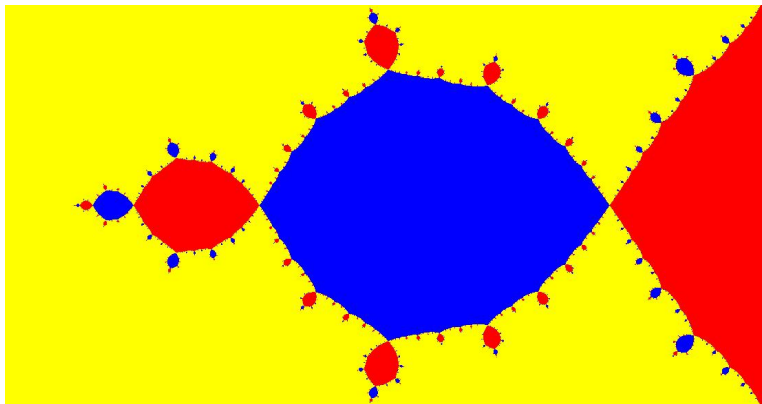
$$f(z) = z^2 - 1$$



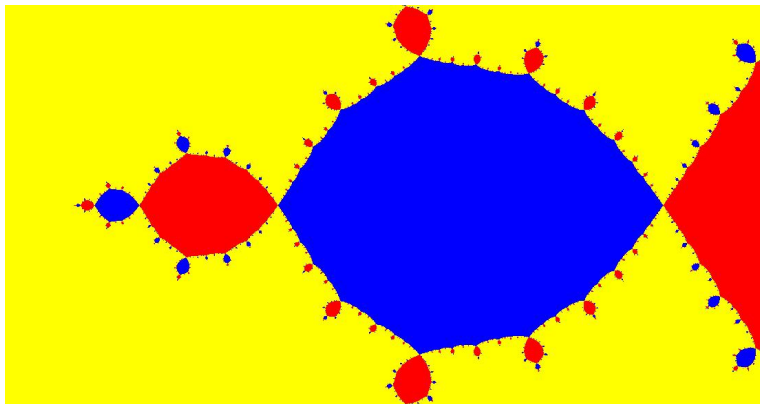
$$f(z) = z^2 - 1$$



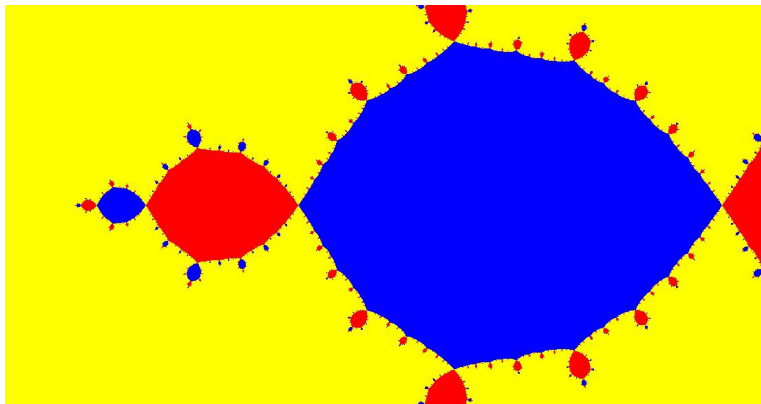
$$f(z) = z^2 - 1$$



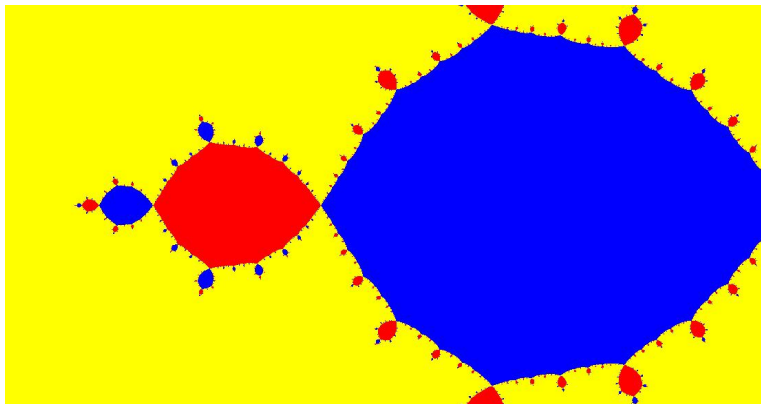
$$f(z) = z^2 - 1$$



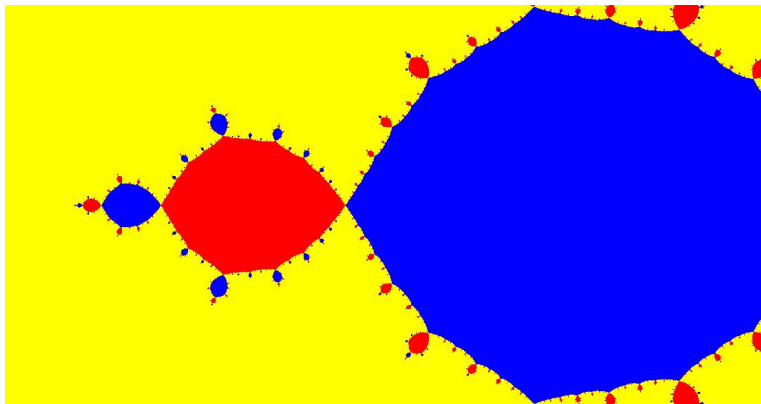
$$f(z) = z^2 - 1$$



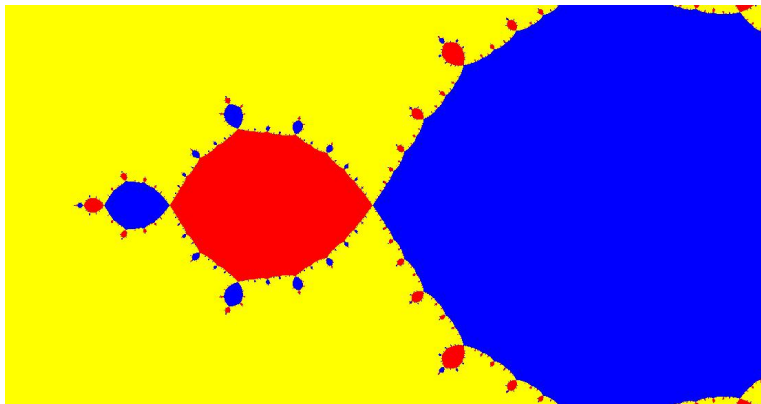
$$f(z) = z^2 - 1$$



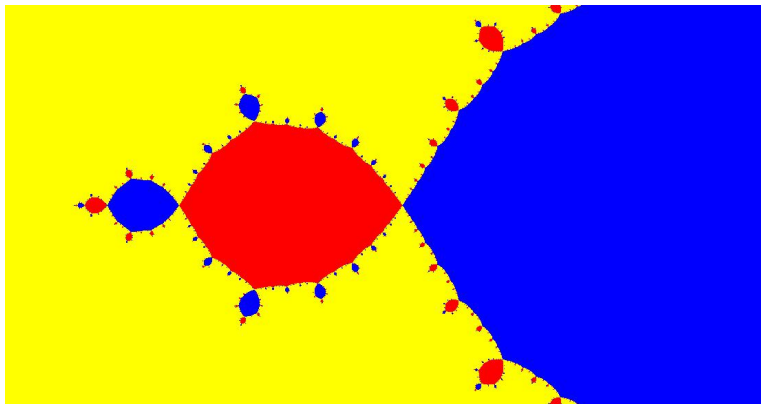
$$f(z) = z^2 - 1$$



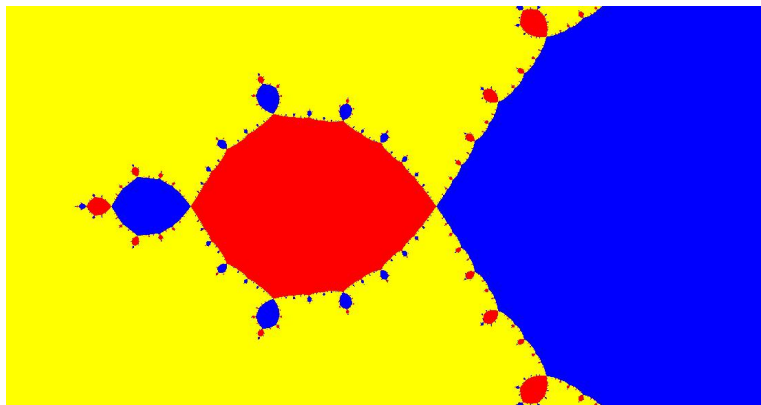
$$f(z) = z^2 - 1$$



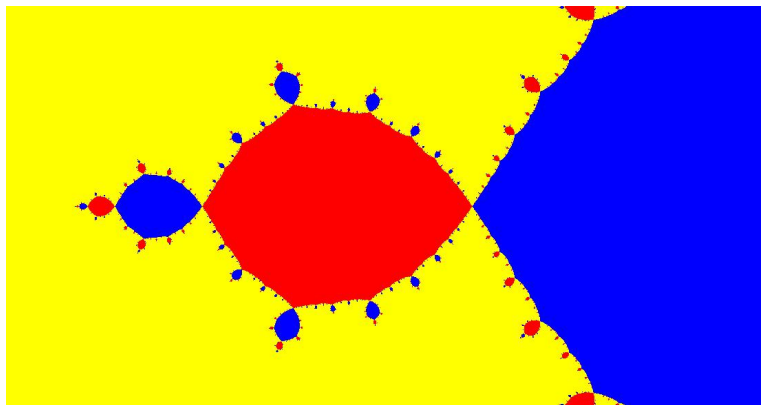
$$f(z) = z^2 - 1$$



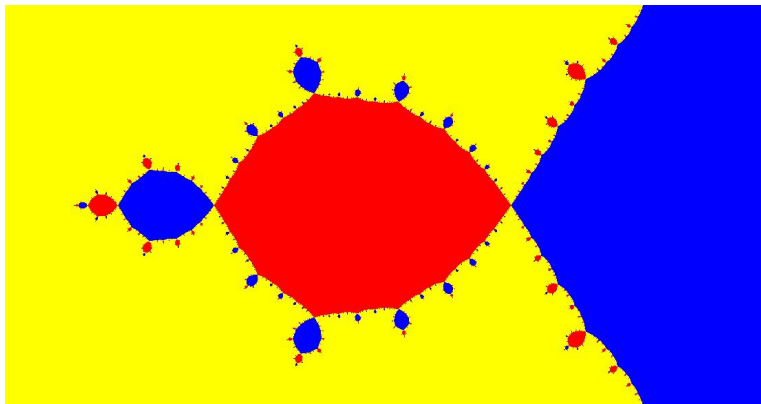
$$f(z) = z^2 - 1$$



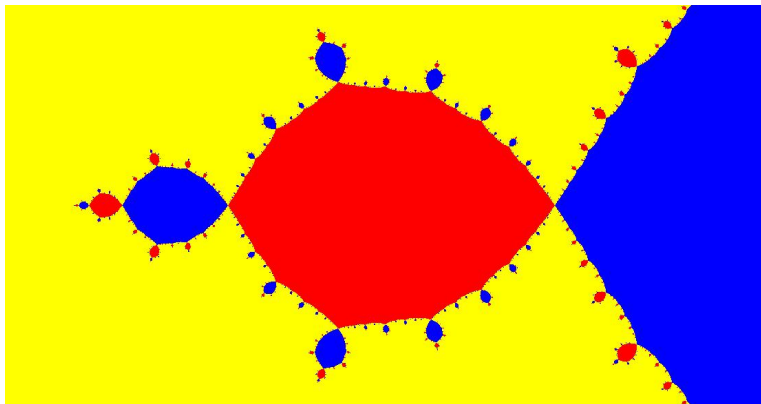
$$f(z) = z^2 - 1$$



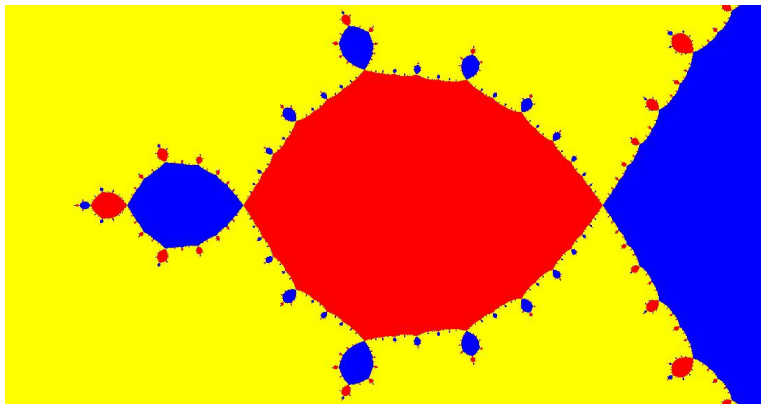
$$f(z) = z^2 - 1$$



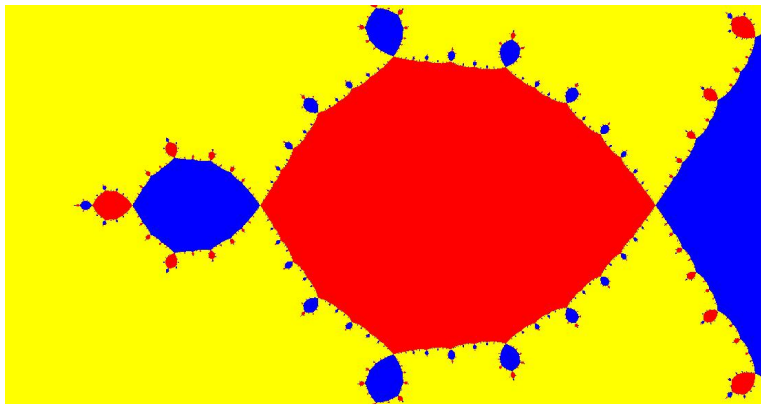
$$f(z) = z^2 - 1$$



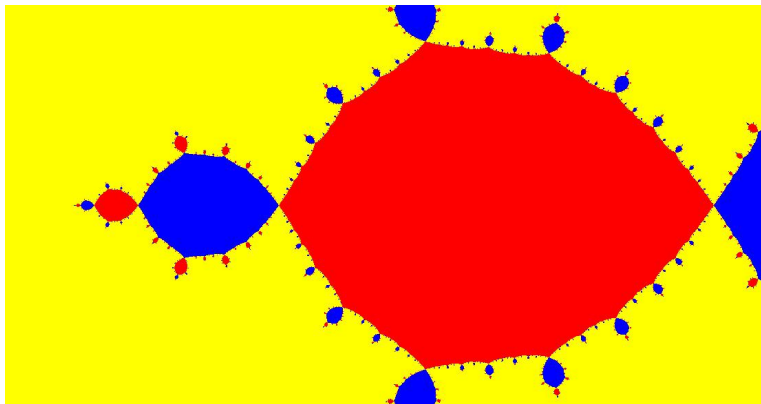
$$f(z) = z^2 - 1$$



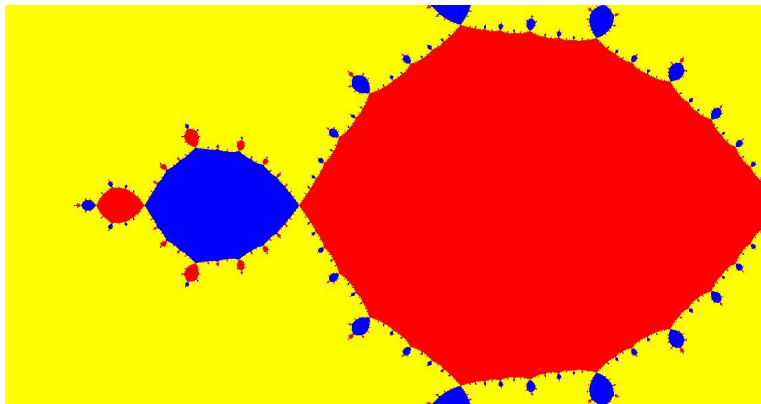
$$f(z) = z^2 - 1$$



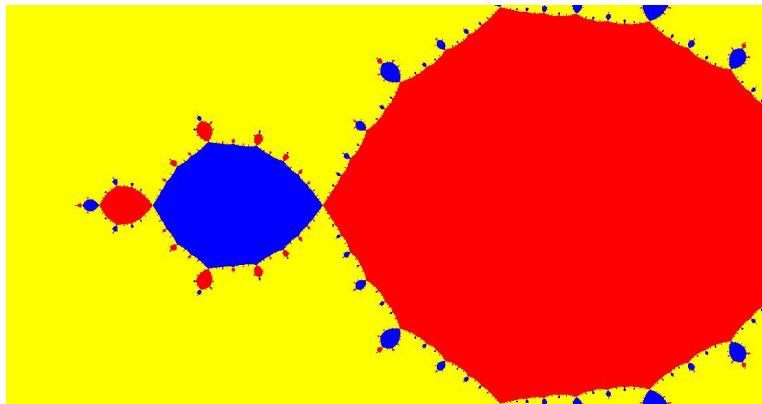
$$f(z) = z^2 - 1$$



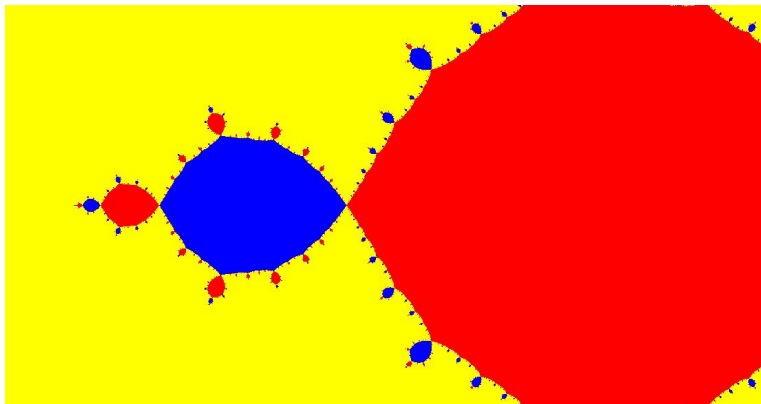
$$f(z) = z^2 - 1$$



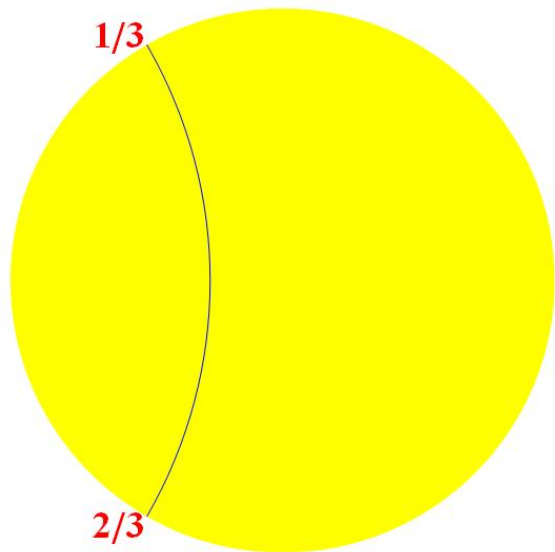
$$f(z) = z^2 - 1$$



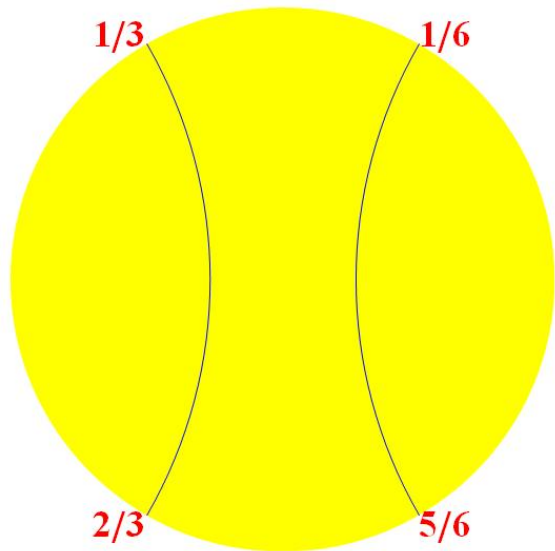
$$f(z) = z^2 - 1$$



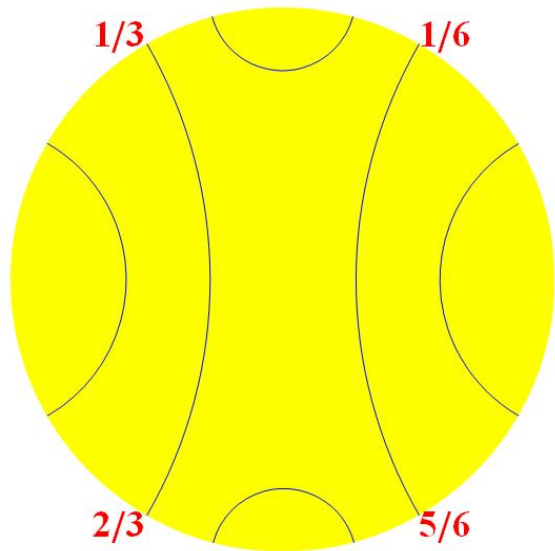
Ламинация для $z^2 - 1$



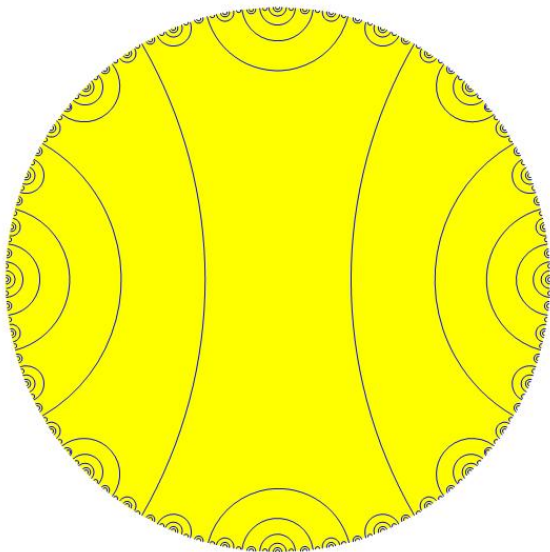
Ламинация для $z^2 - 1$



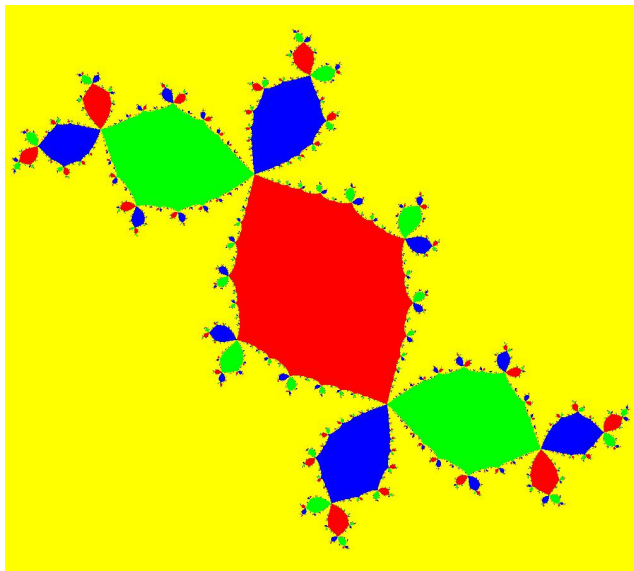
Ламинация для $z^2 - 1$



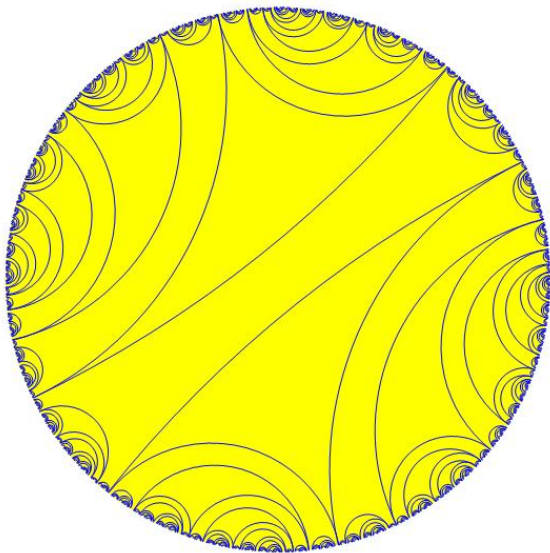
Ламинация для $z^2 - 1$



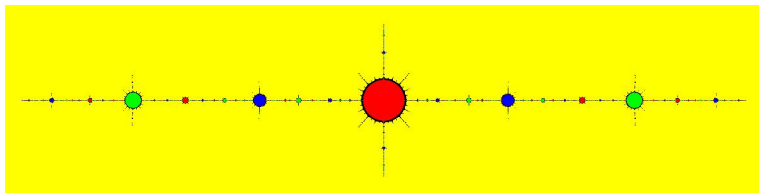
Кролик: $f(z) = z^2 - 0.12.. + 0.74..i$



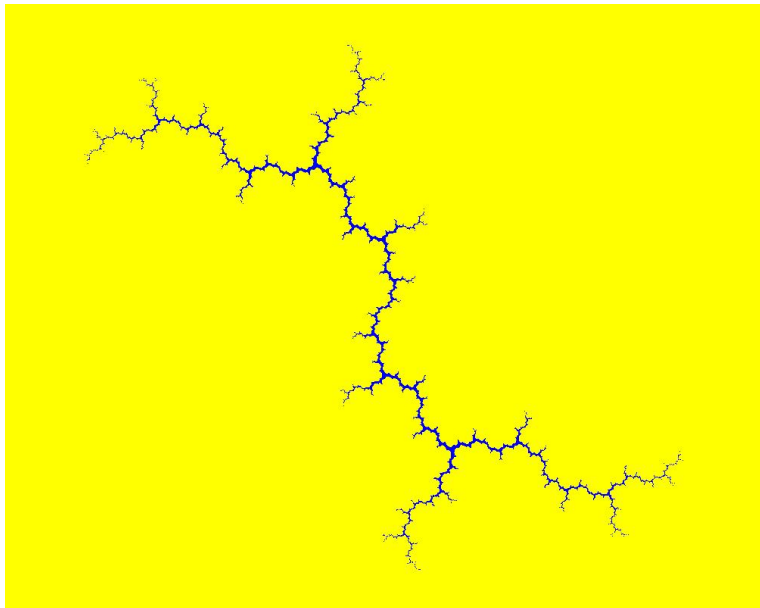
Ламинация для кролика



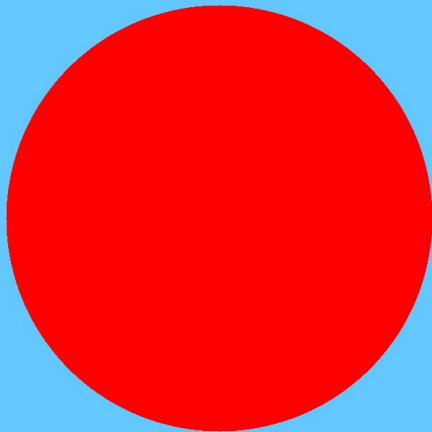
Самолет: $f(z) = z^2 - 1.75..$



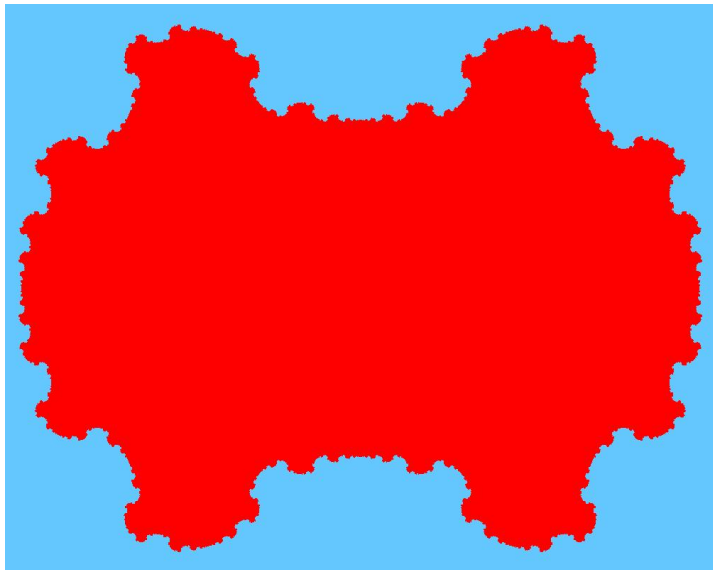
Дендрит: $f(z) = z^2 + i$



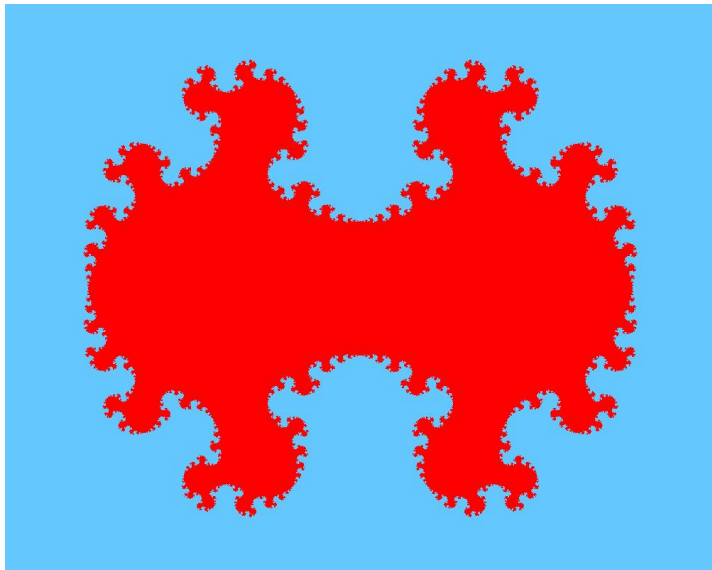
$$f(z) = 1/z^2$$



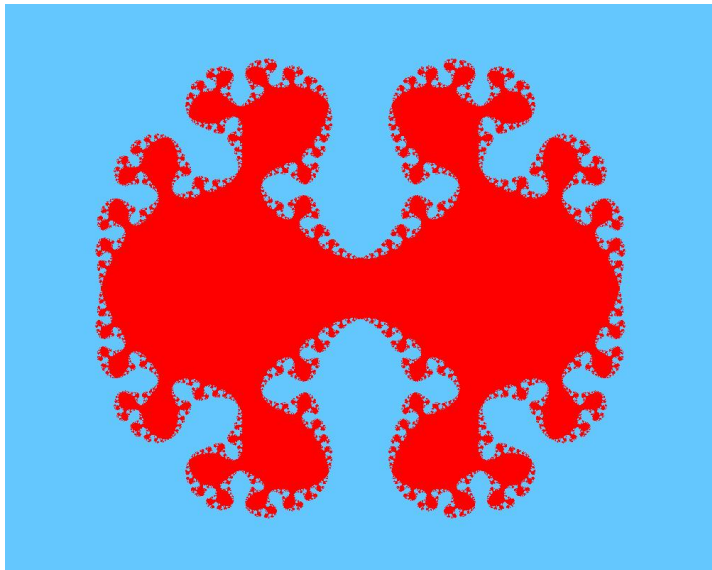
$$f(z) = 10/(z^2 + 2z)$$



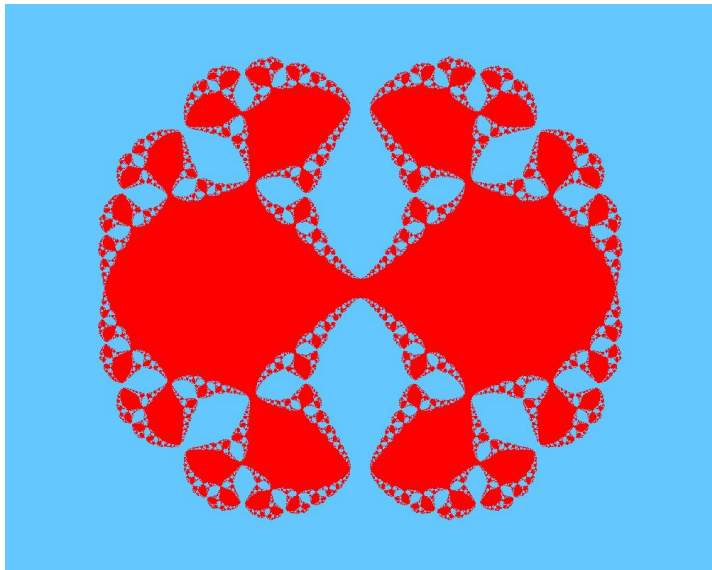
$$f(z) = 4/(z^2 + 2z)$$



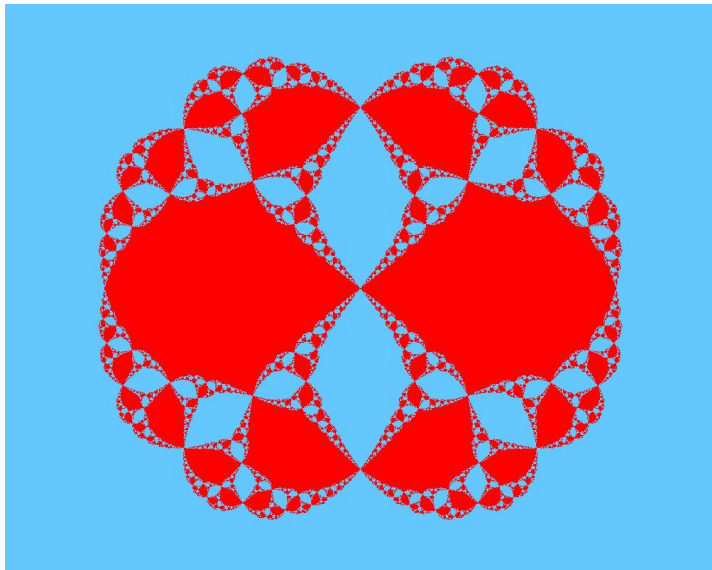
$$f(z) = 3.2/(z^2 + 2z)$$



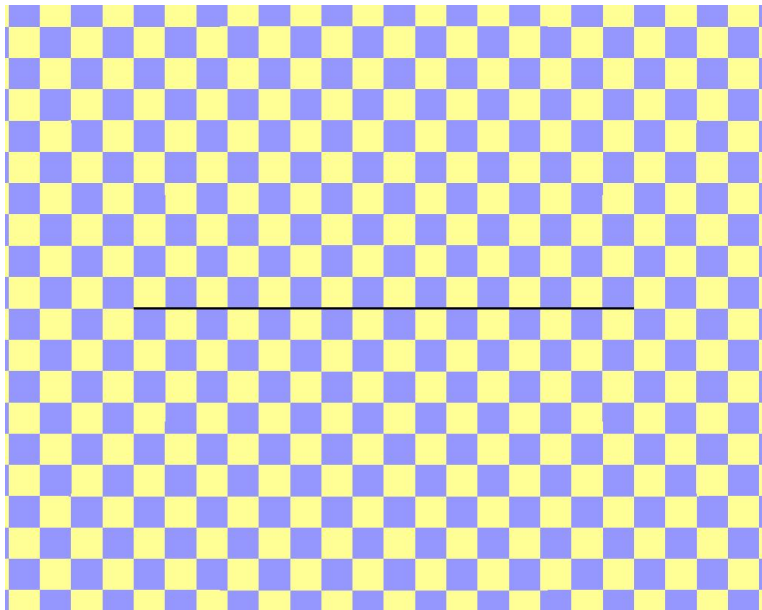
$$f(z) = 3.02/(z^2 + 2z)$$



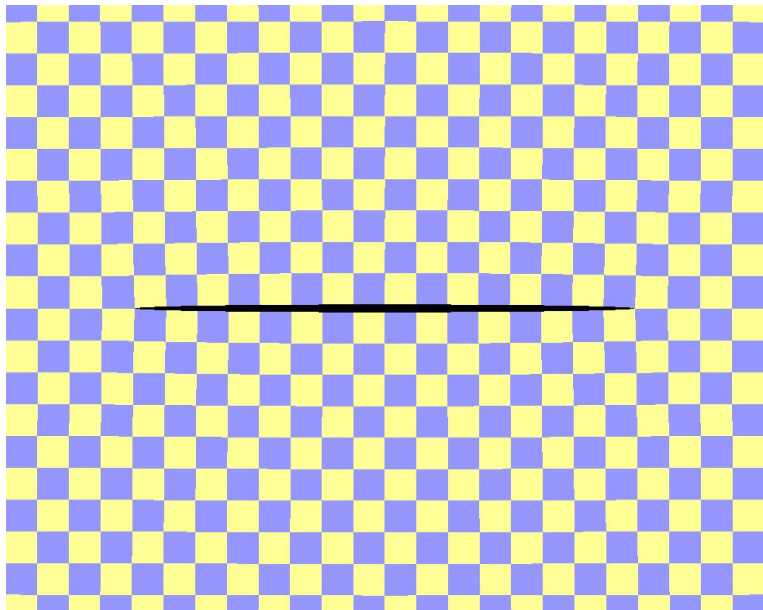
$$f(z) = 3/(z^2 + 2z)$$



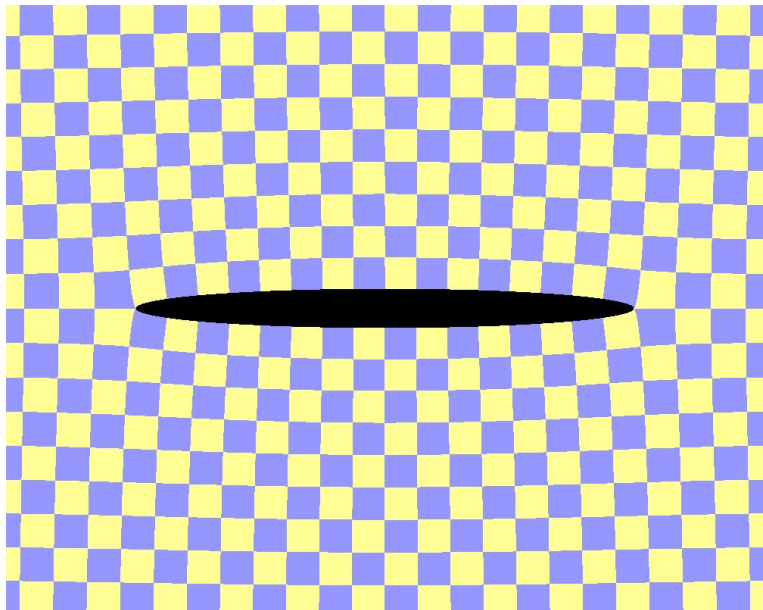
Переклейка



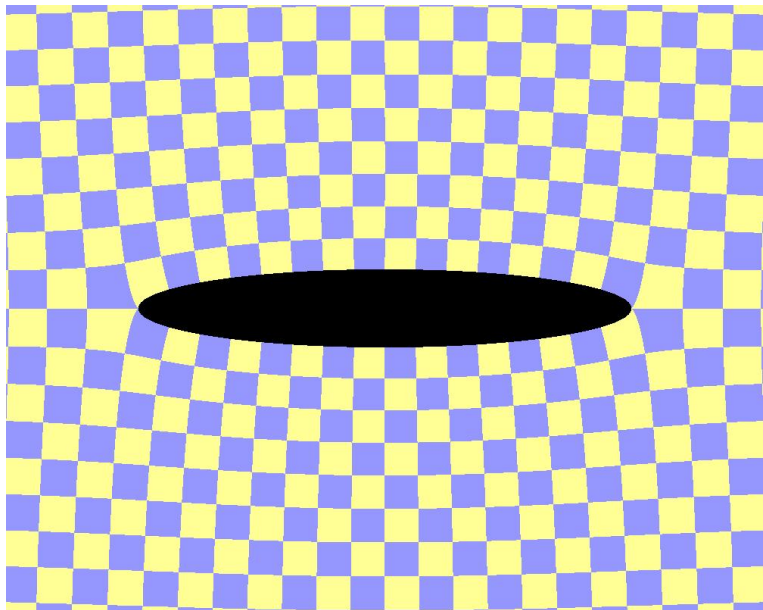
Переклейка



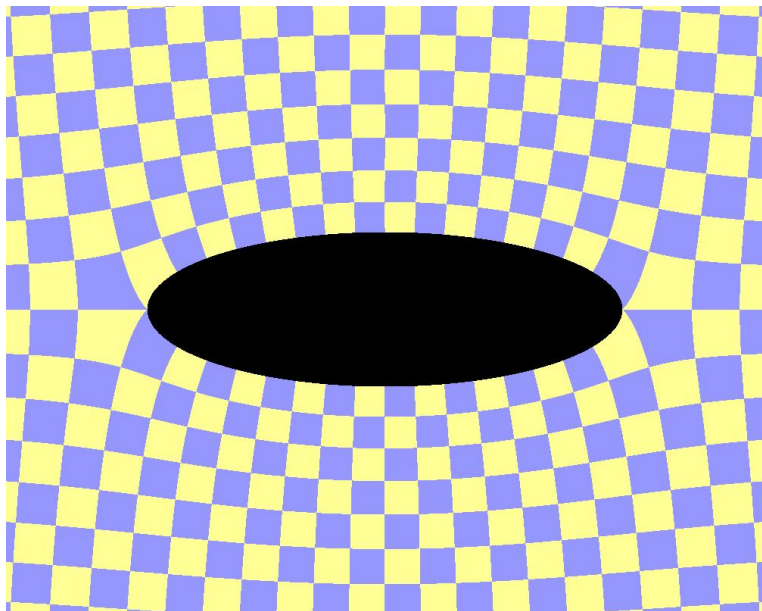
Переклейка



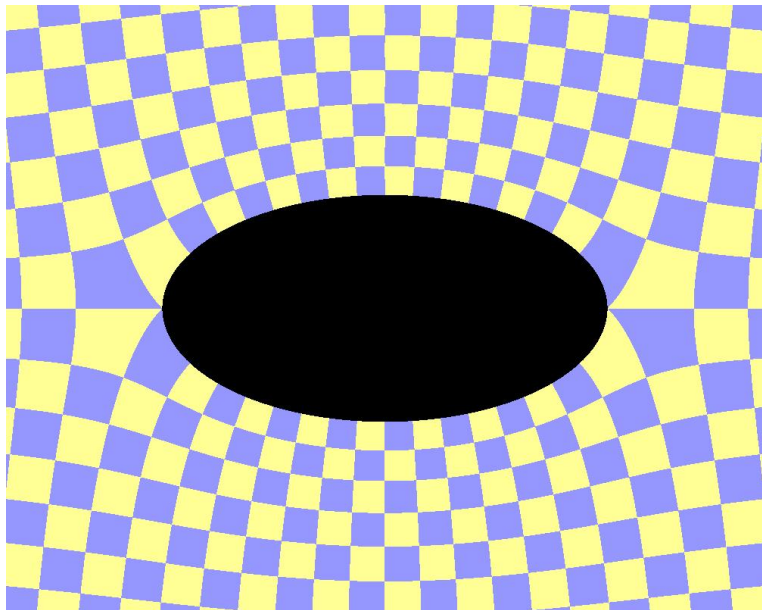
Переклейка



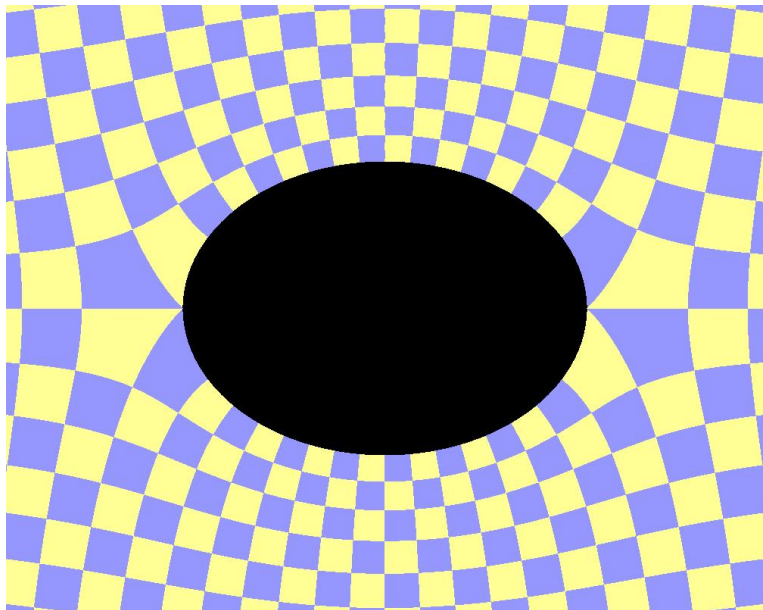
Переклейка



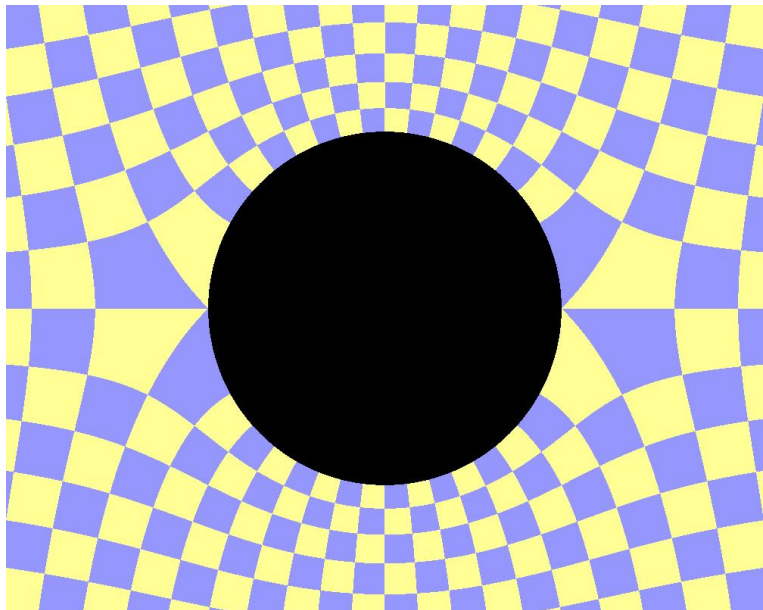
Переклейка



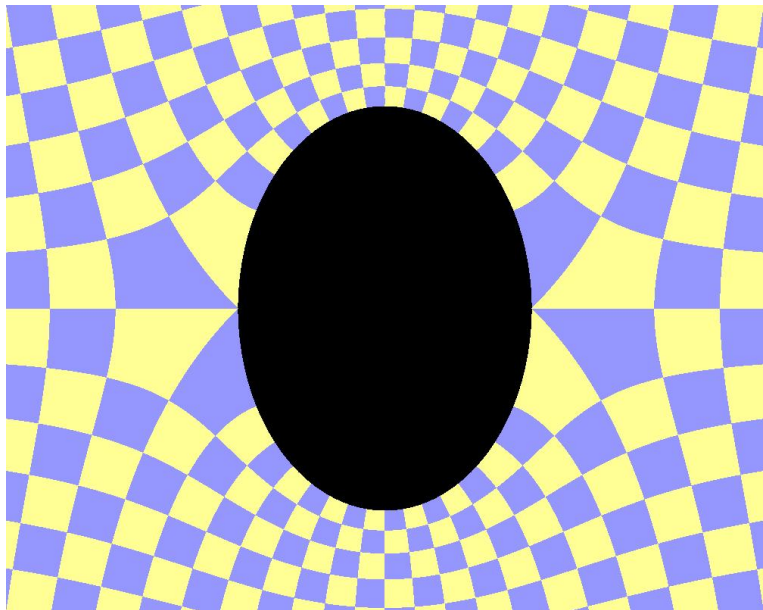
Переклейка



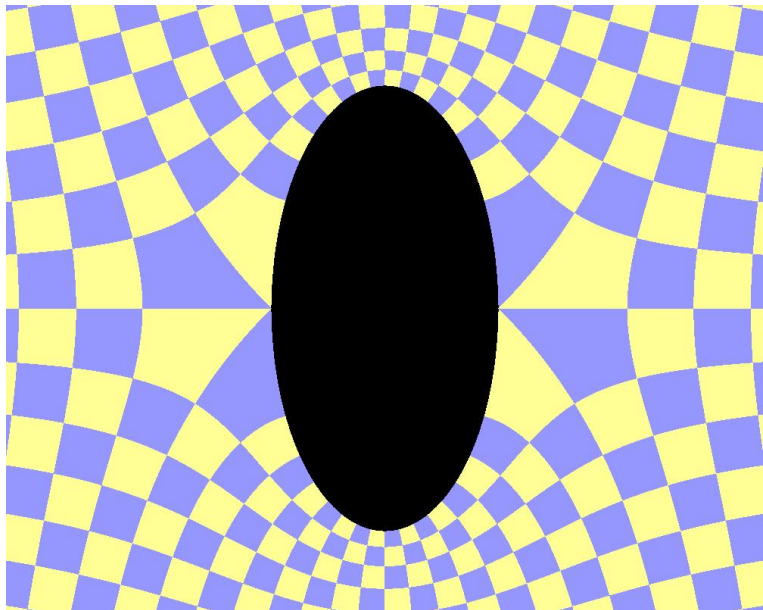
Переклейка



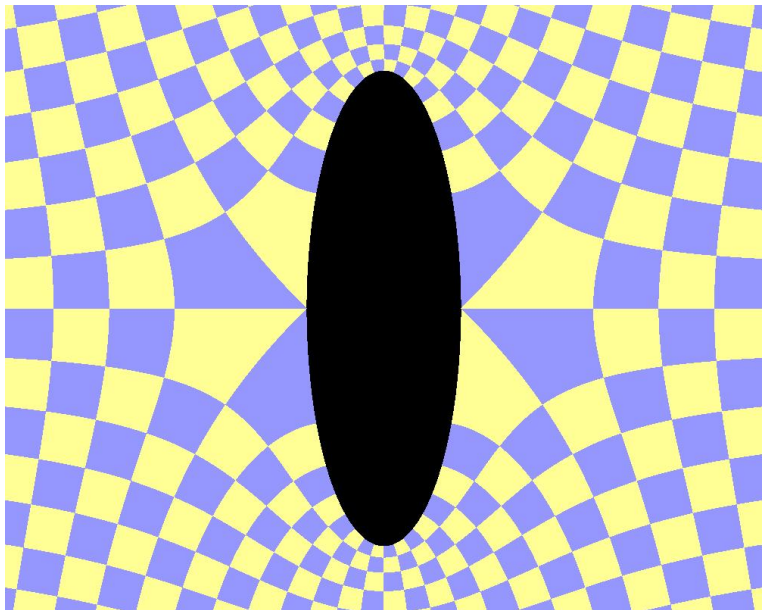
Переклейка



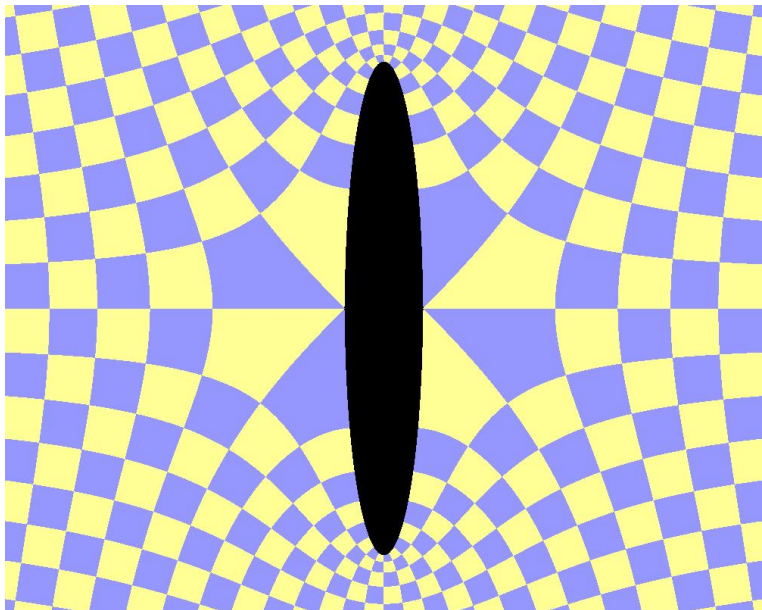
Переклейка



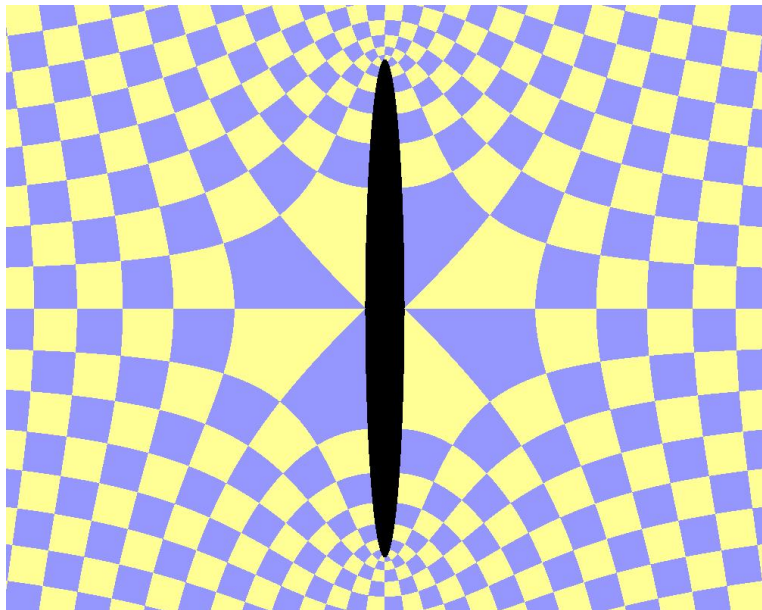
Переклейка



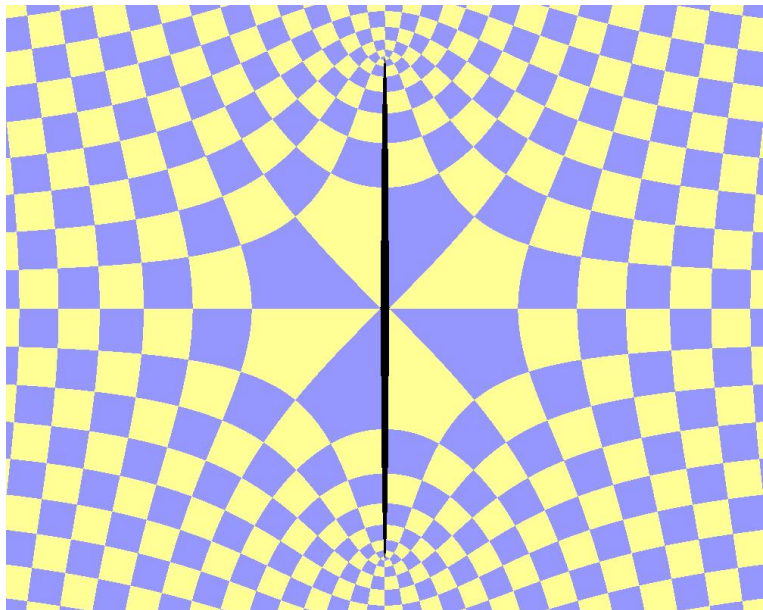
Переклейка



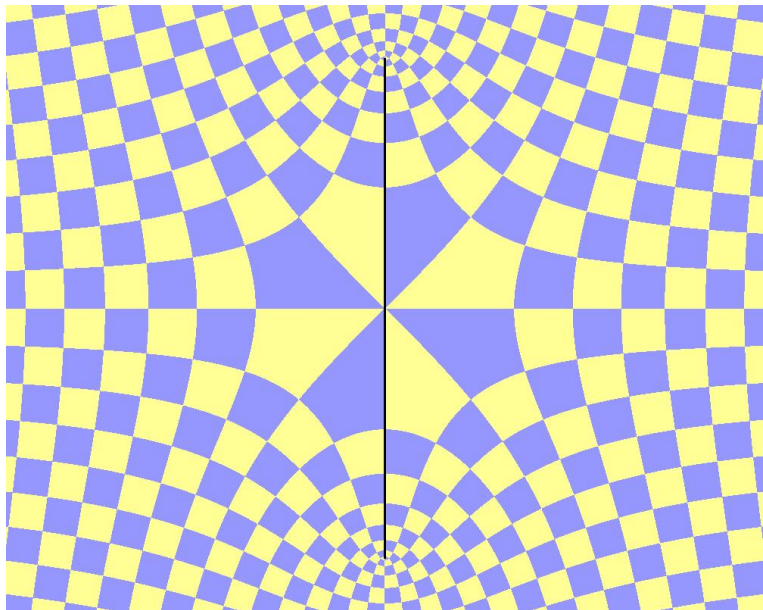
Переклейка



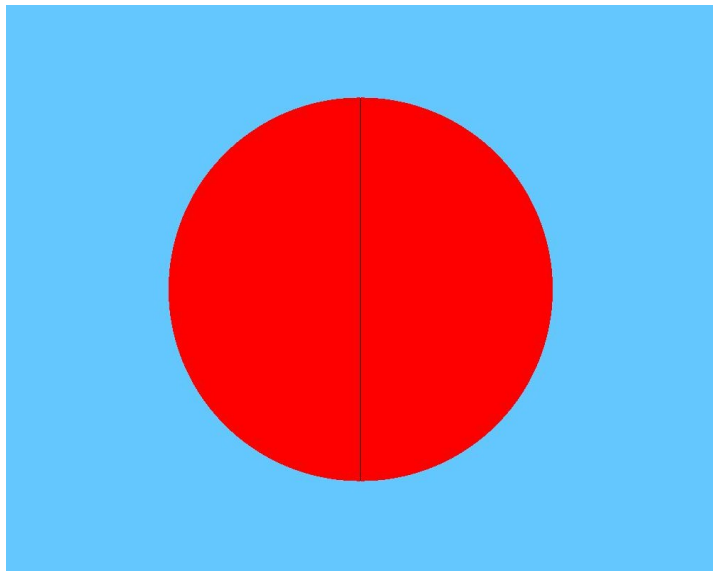
Переклейка



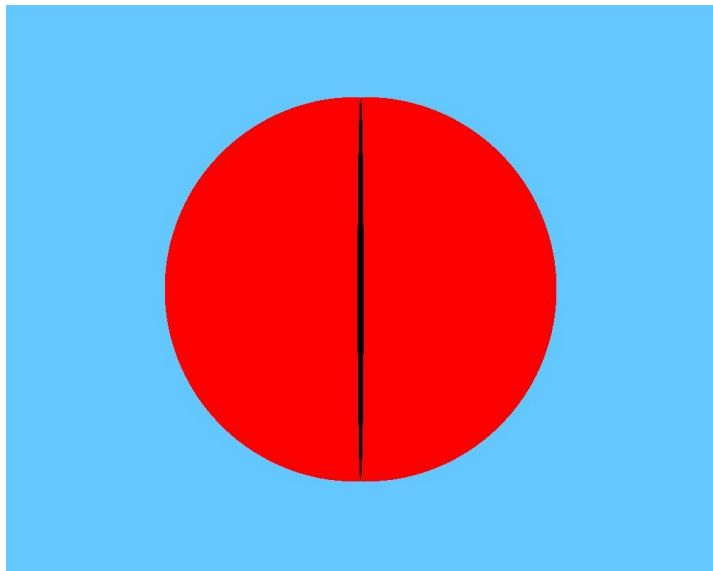
Переклейка



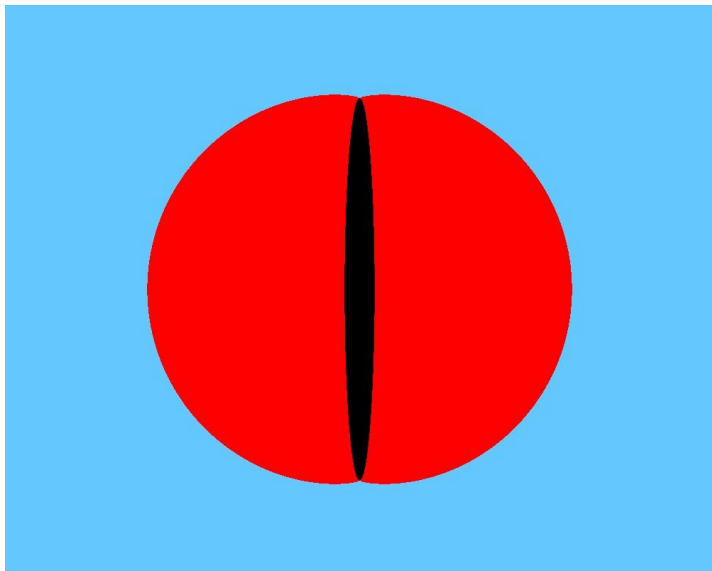
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



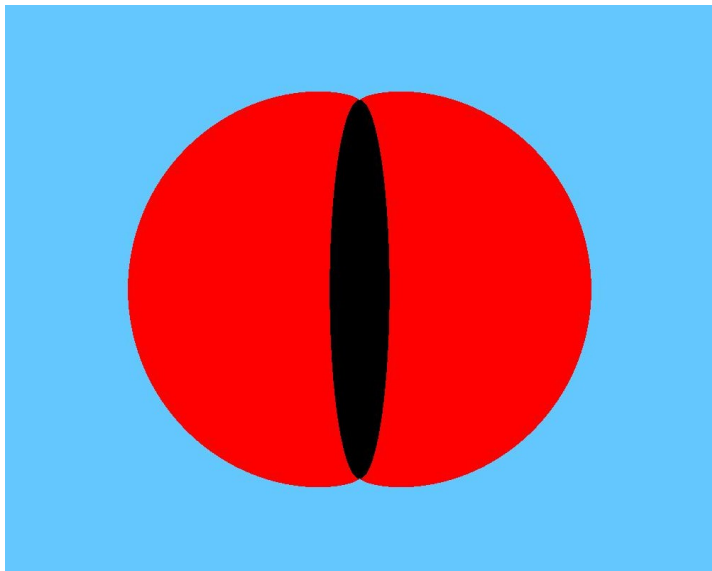
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



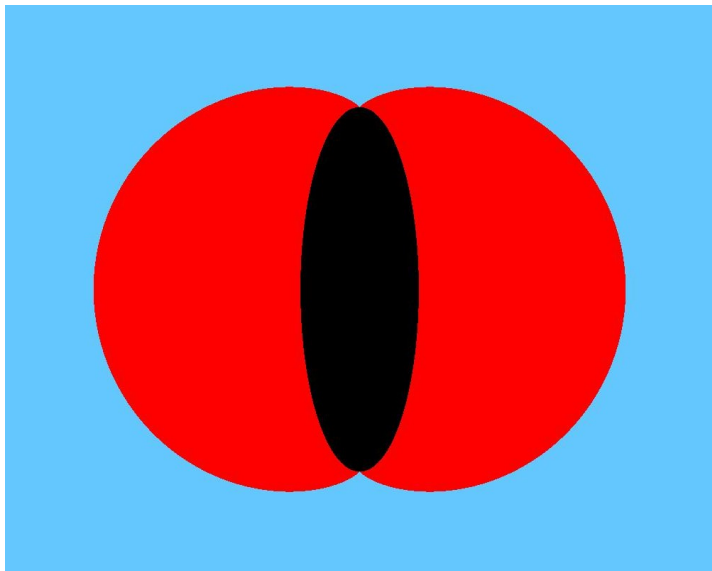
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



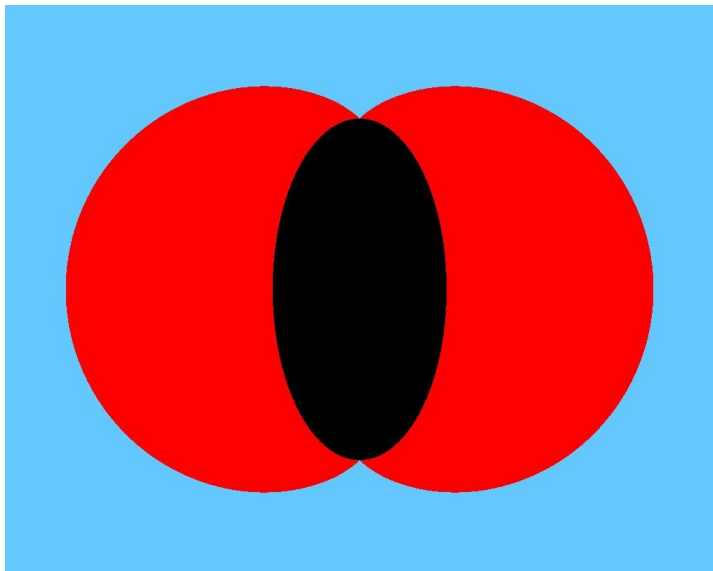
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



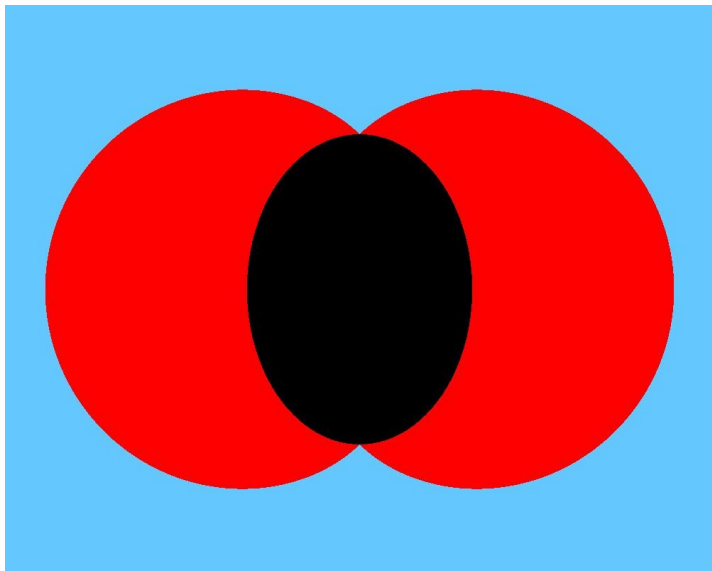
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



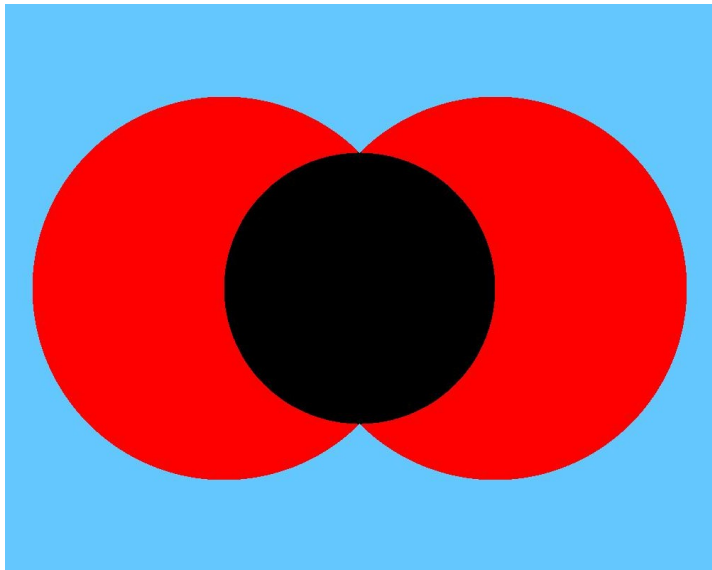
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



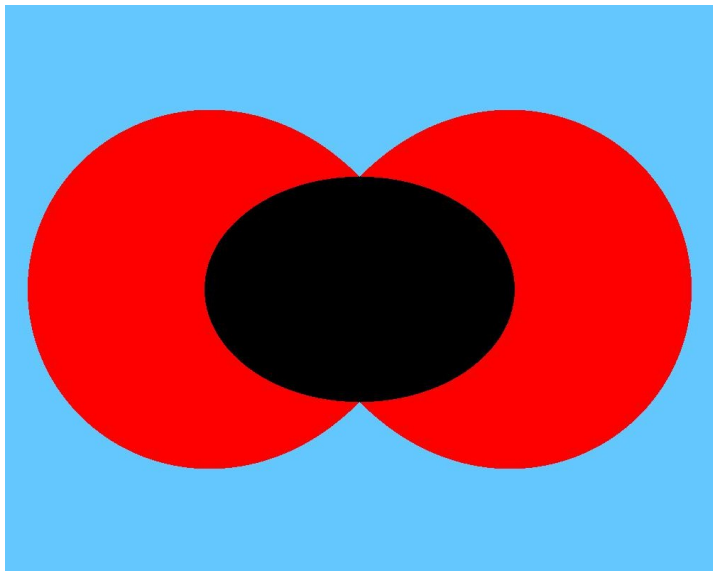
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



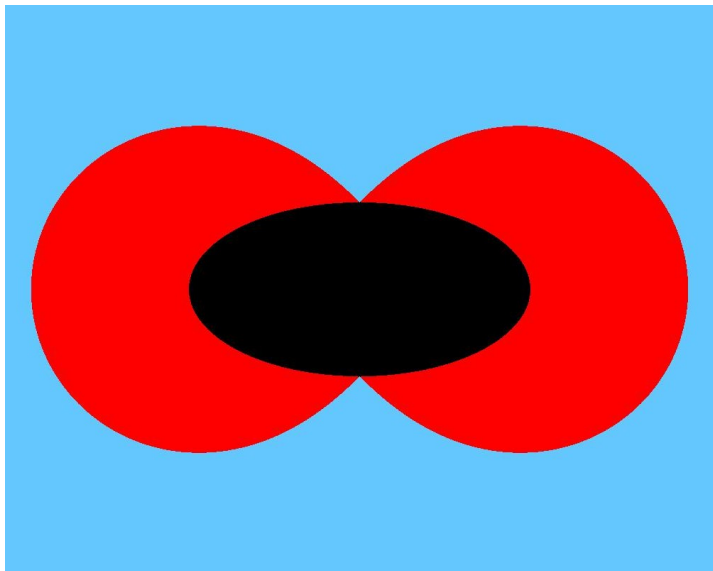
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



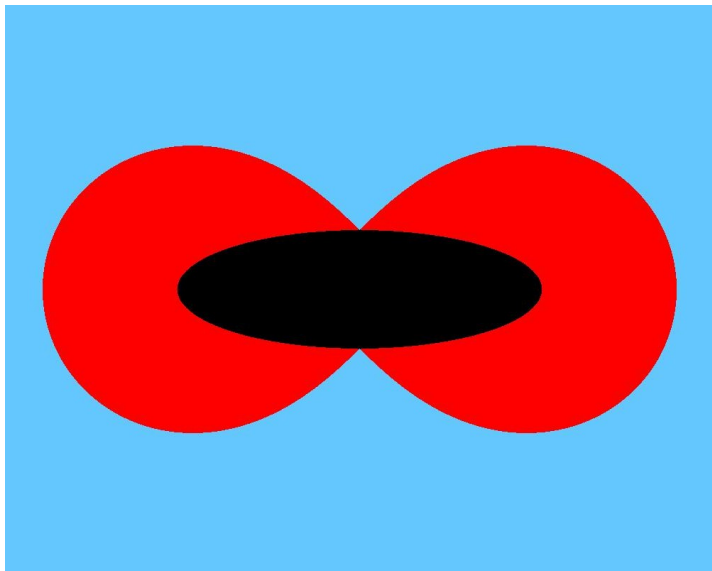
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



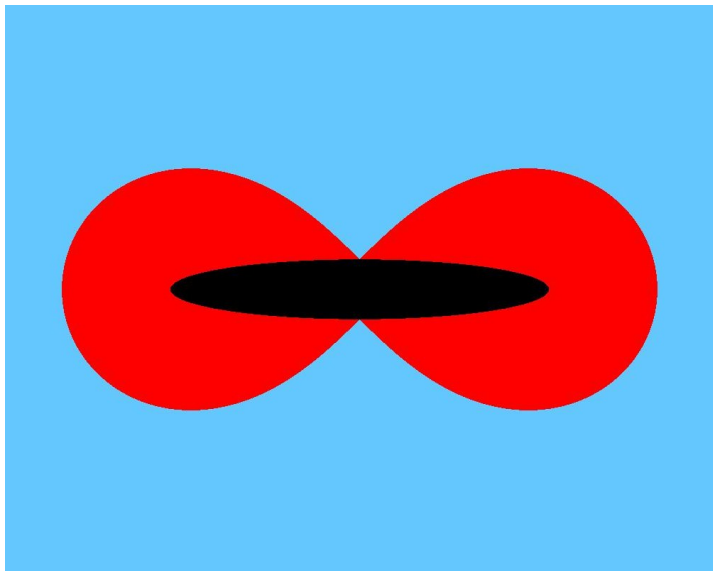
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



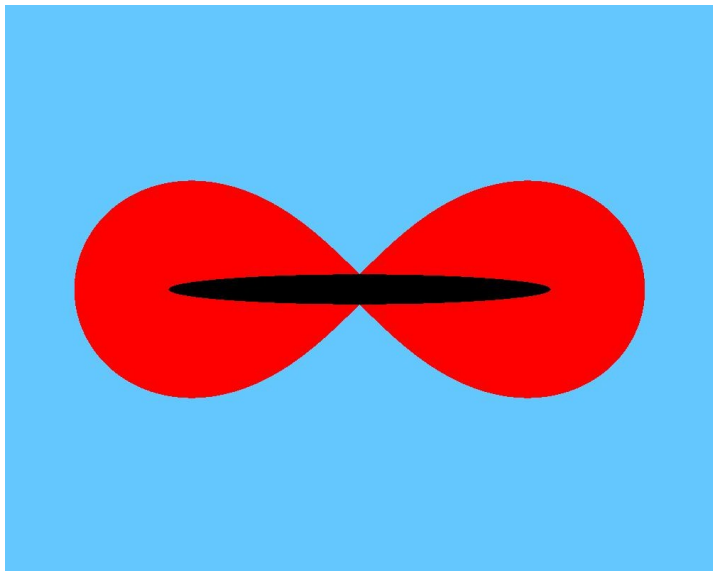
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



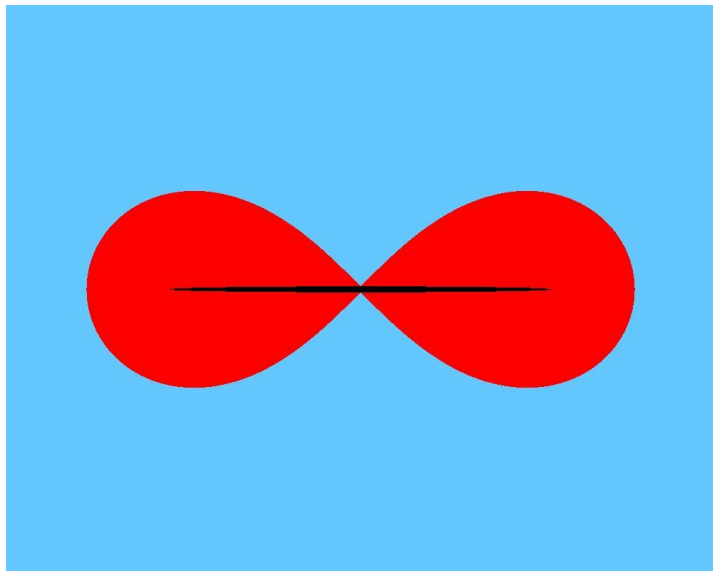
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



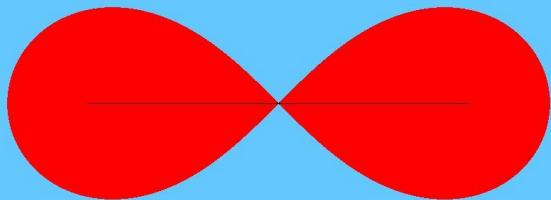
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



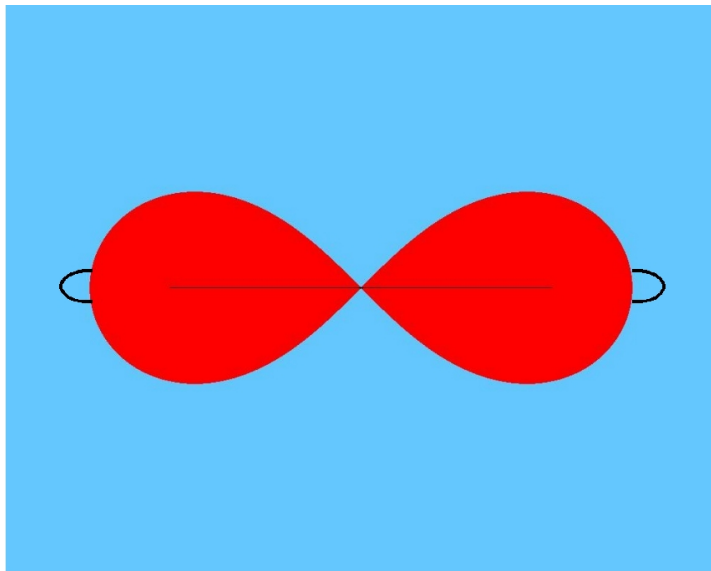
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



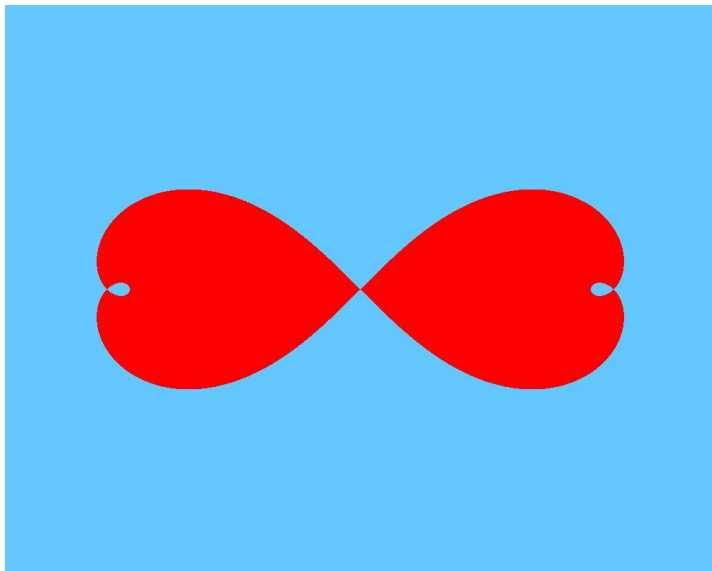
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



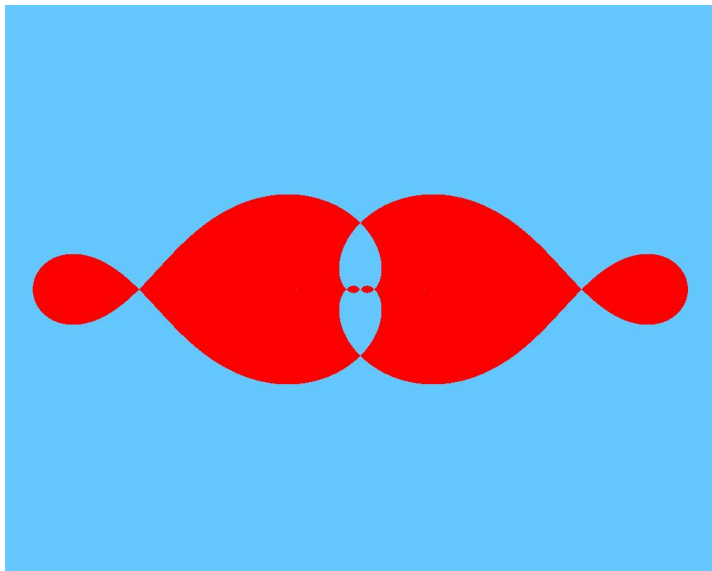
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 0



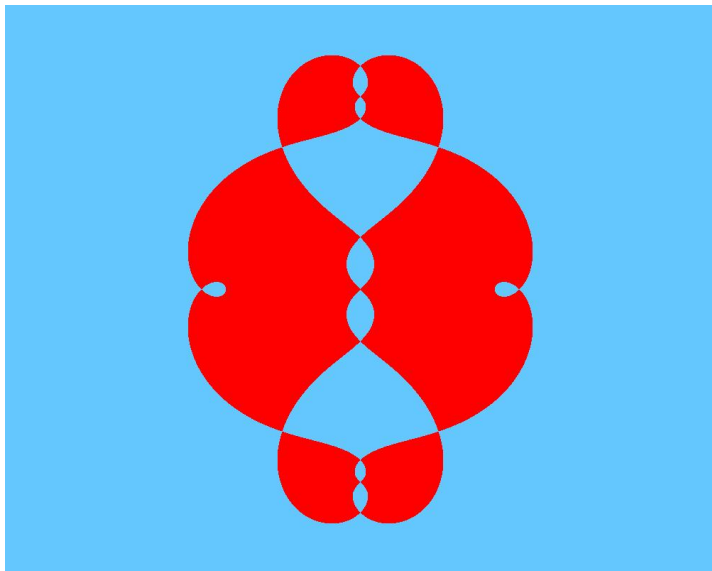
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 1



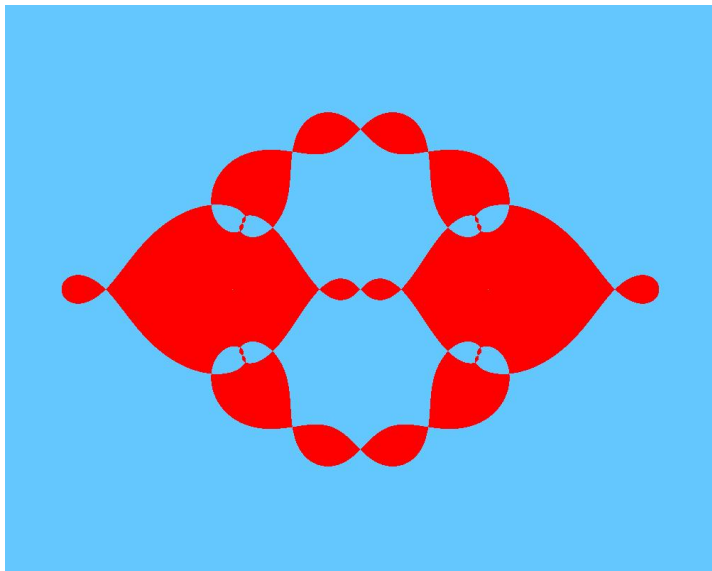
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 2



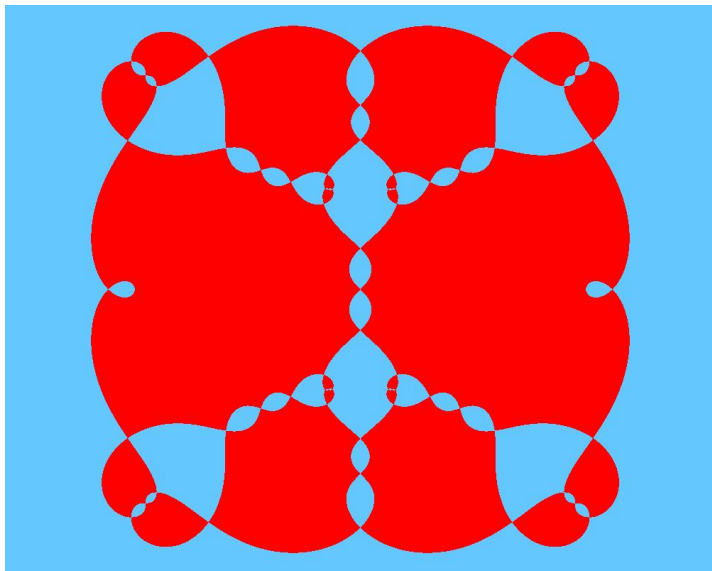
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 3



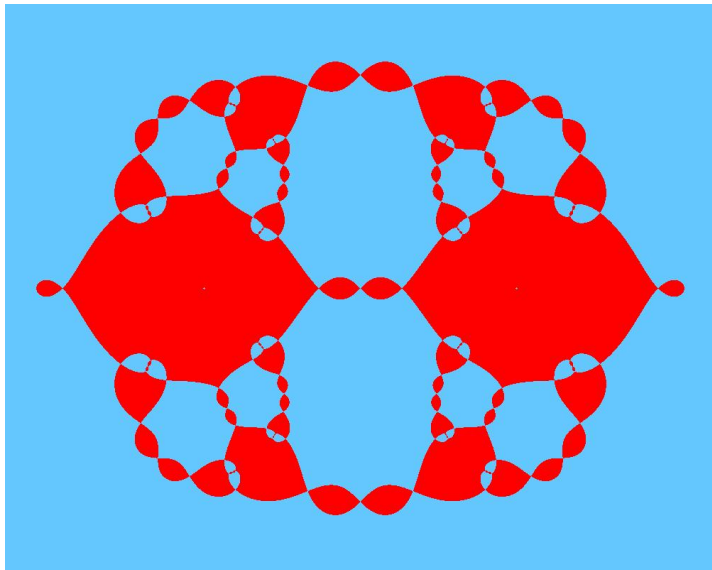
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 4



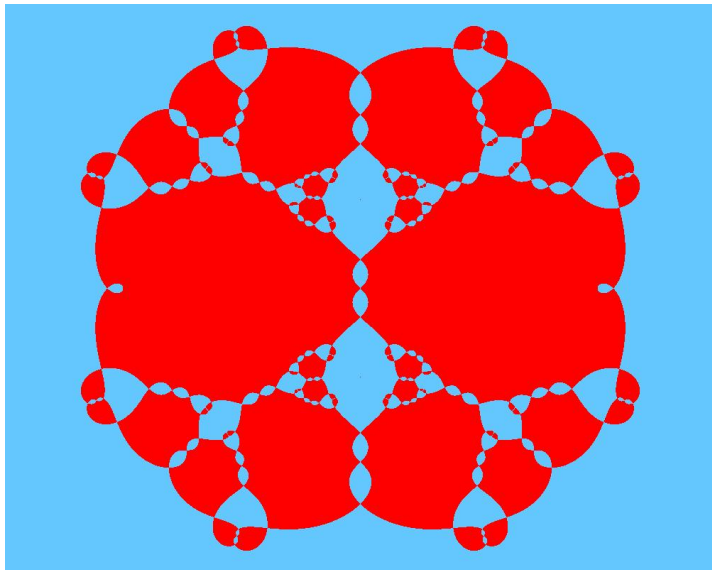
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 5



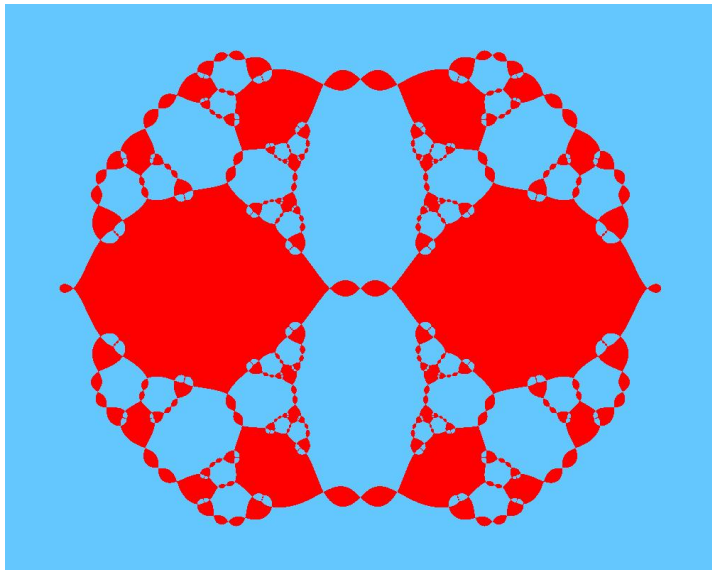
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 6



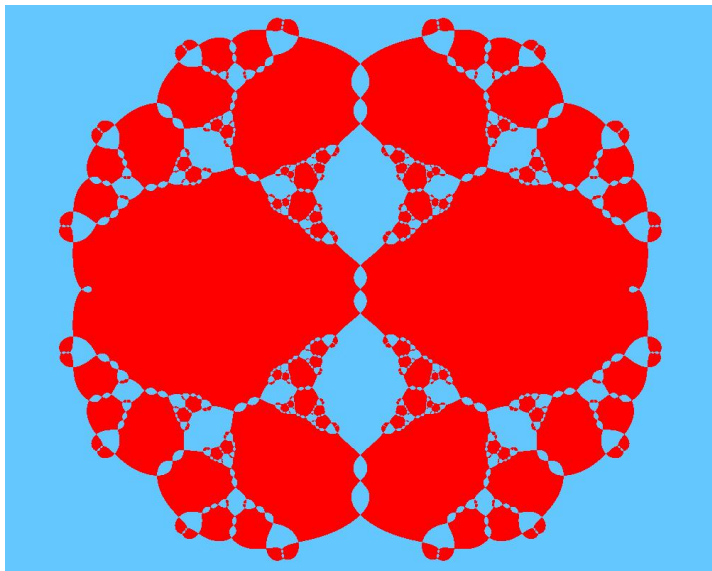
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 7



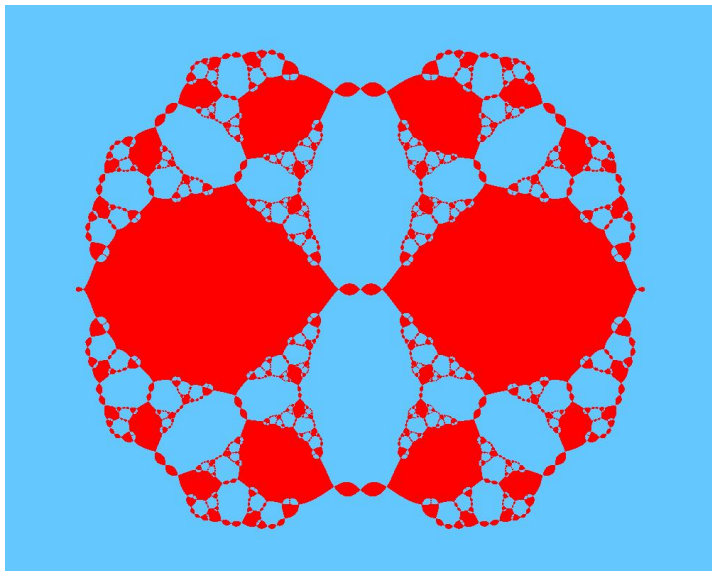
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 8



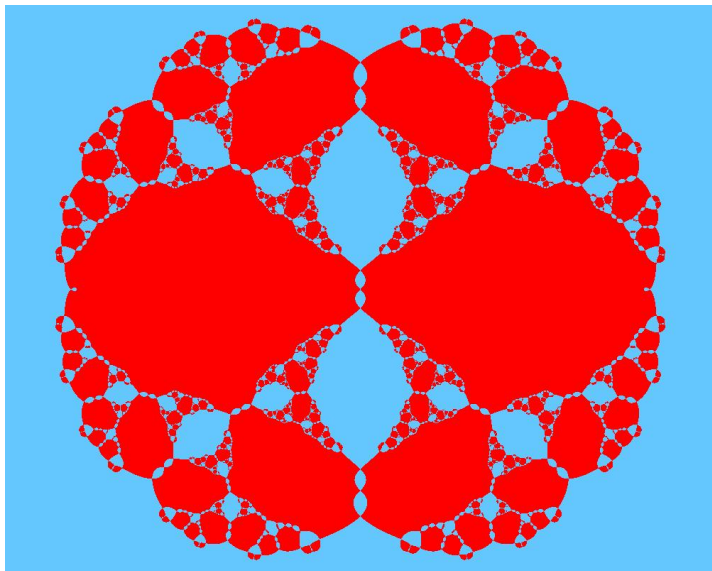
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 9



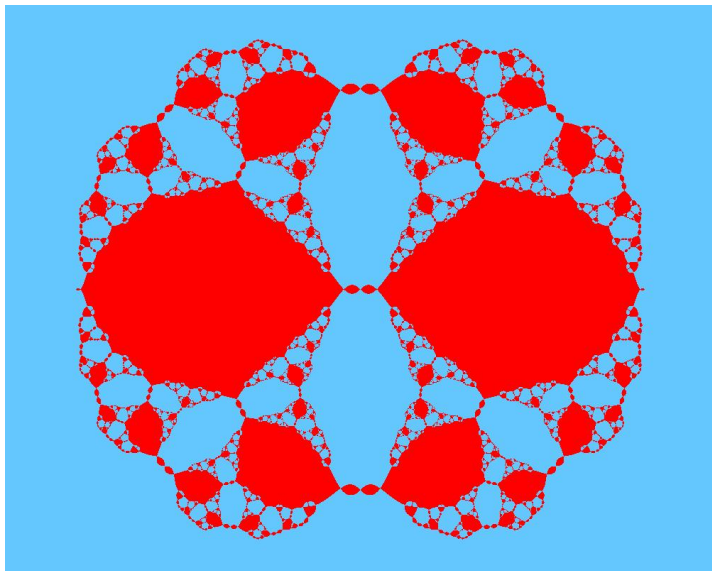
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 10



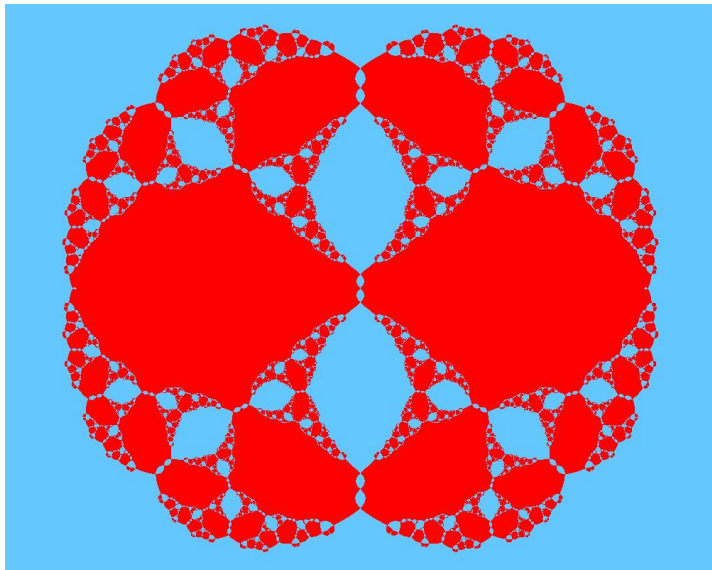
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 11



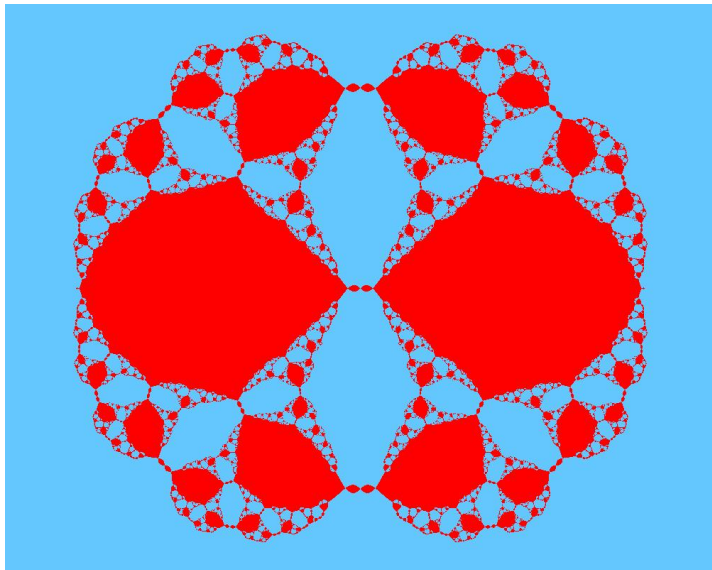
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 12



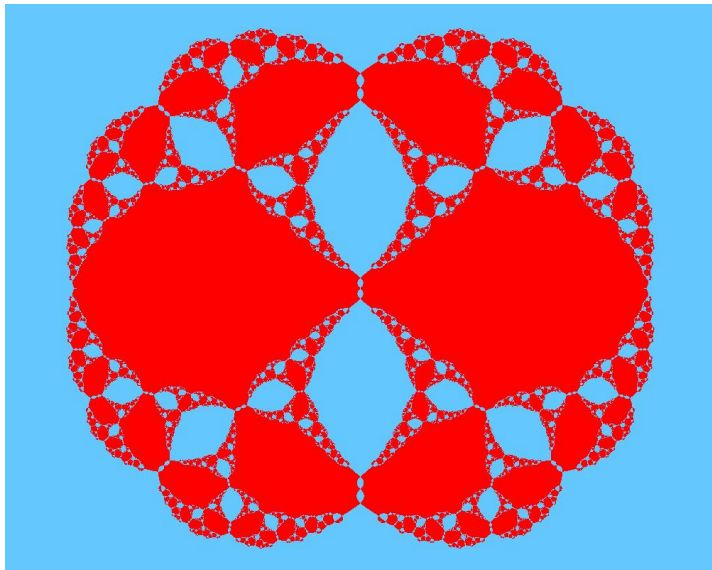
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 13



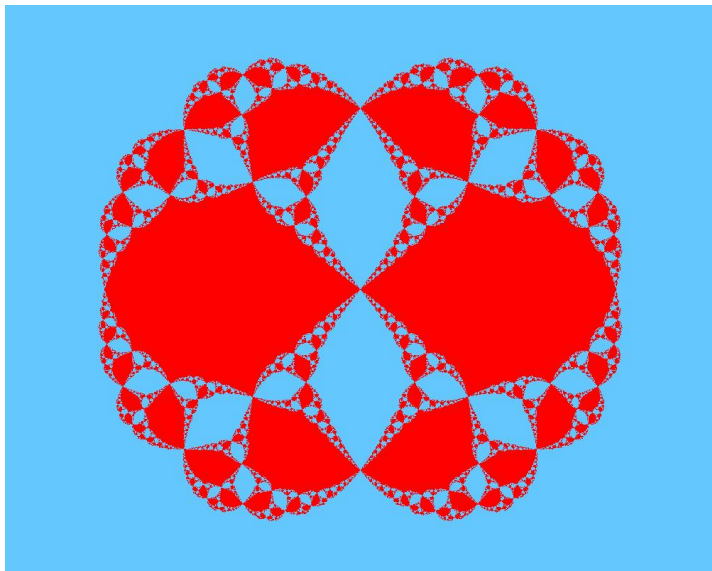
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 14



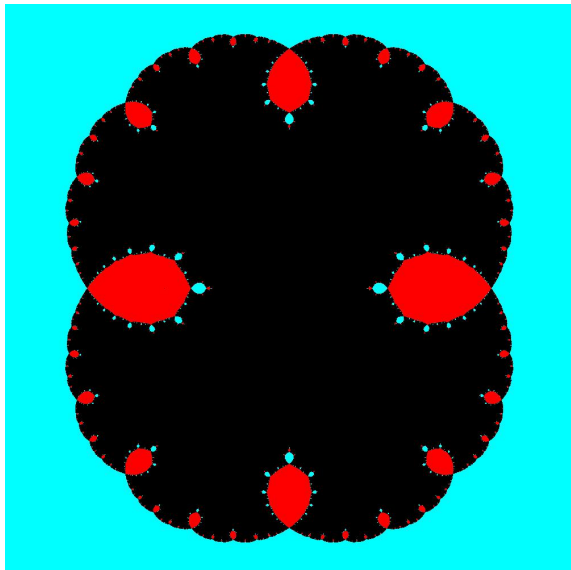
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: шаг 15



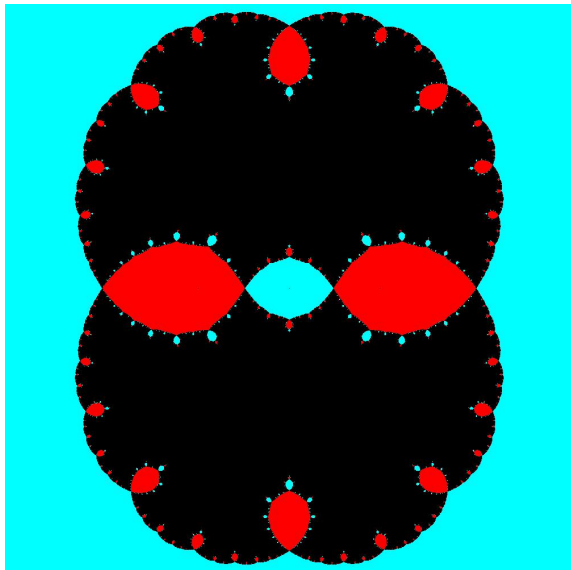
Переклейка $1/z^2$ в $3/(z^2 + 2z)$: предел



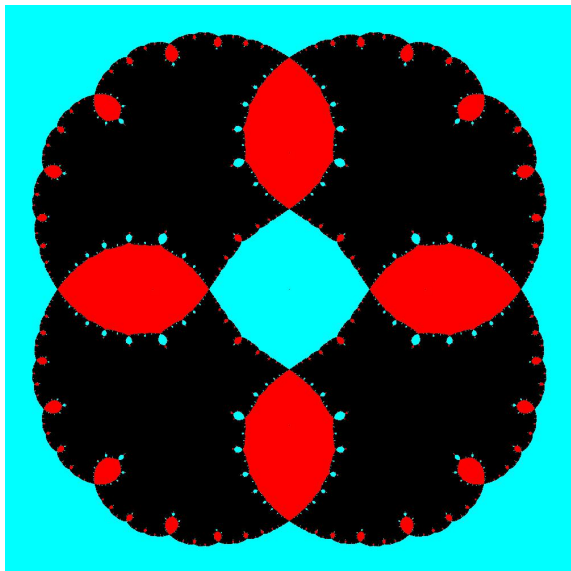
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 0



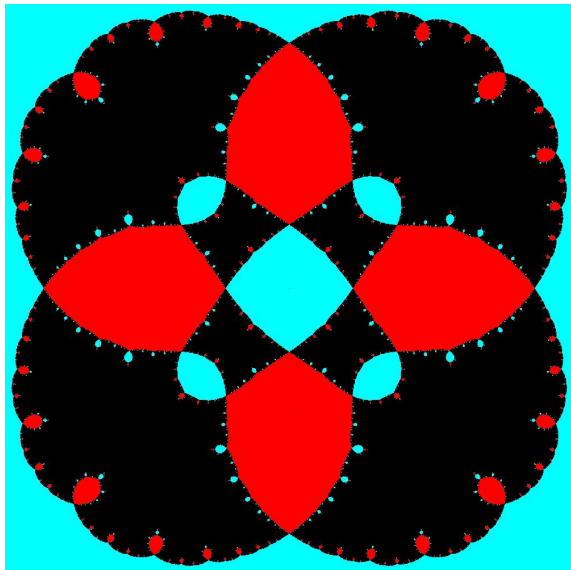
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 1



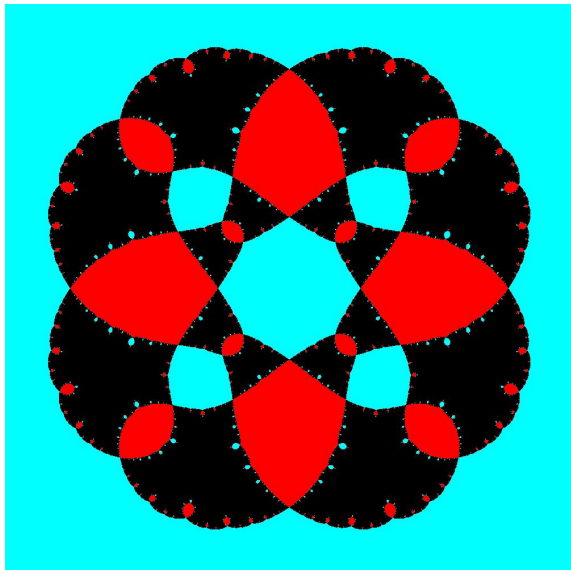
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 2



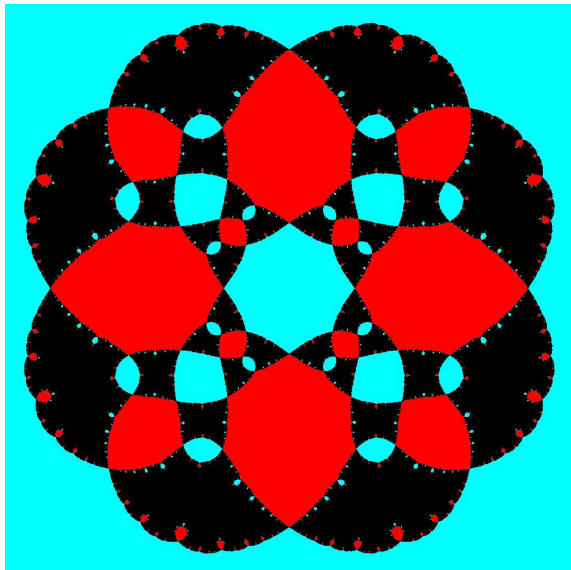
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 3



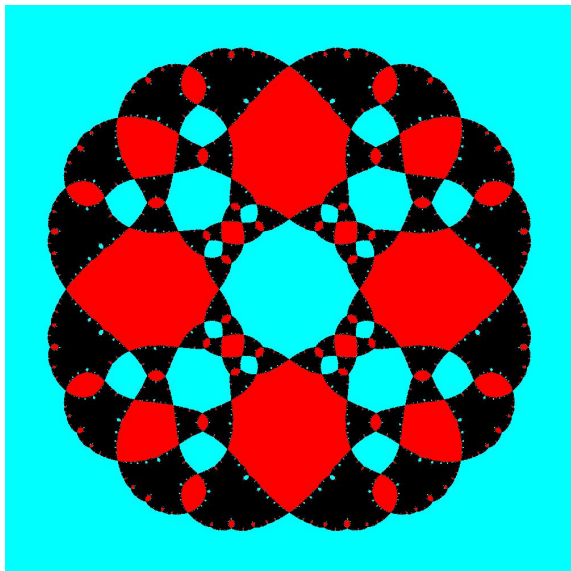
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 4



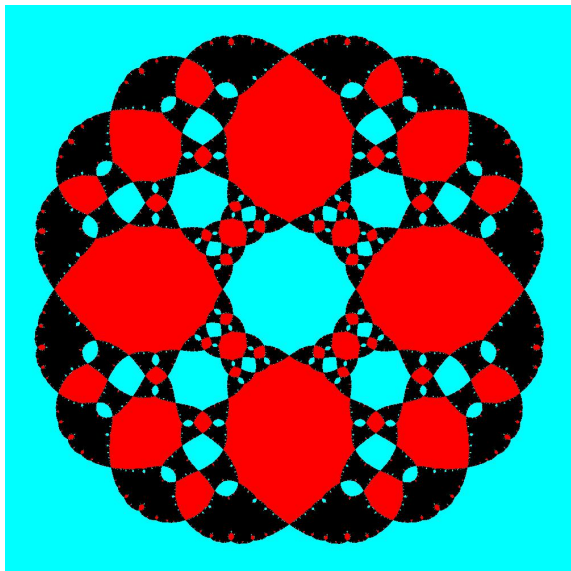
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 5



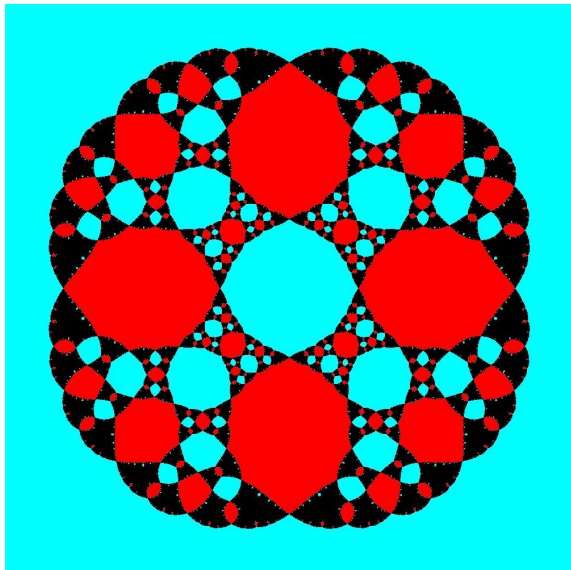
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 6



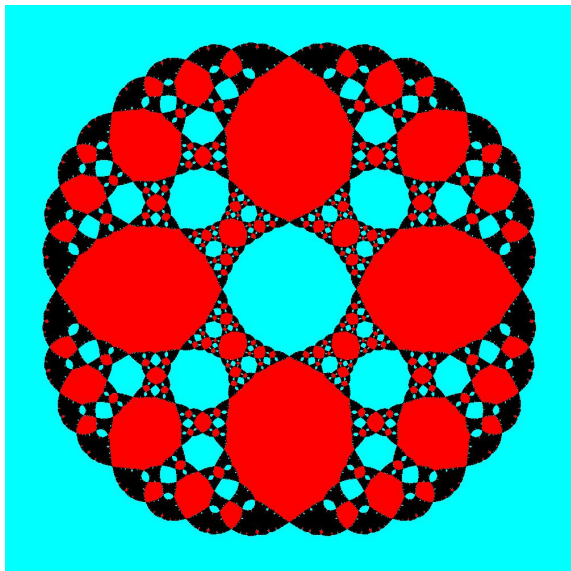
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 7



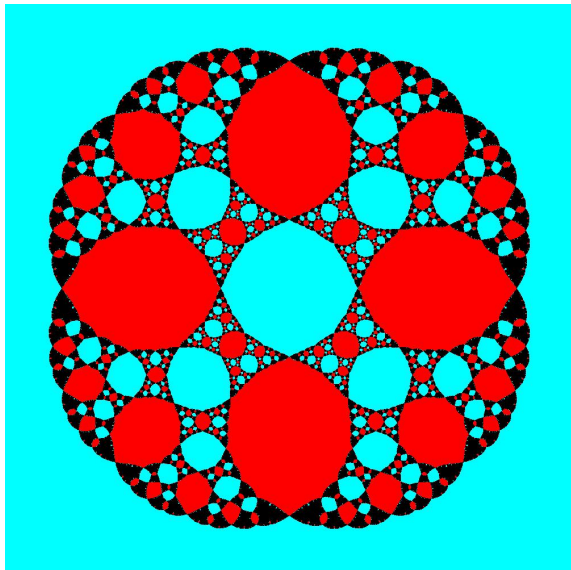
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 8



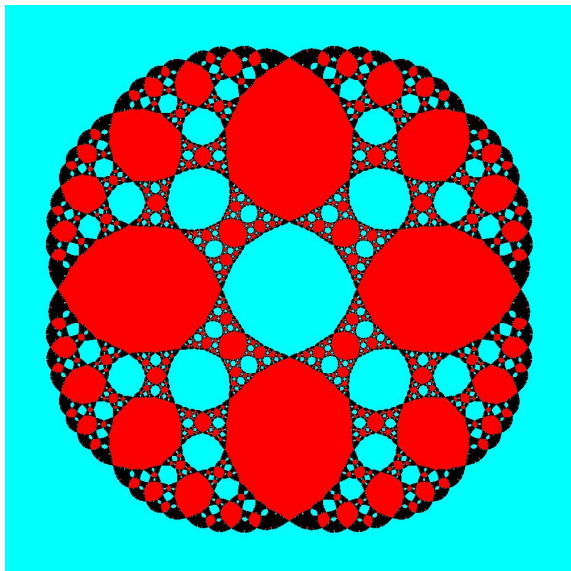
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 9



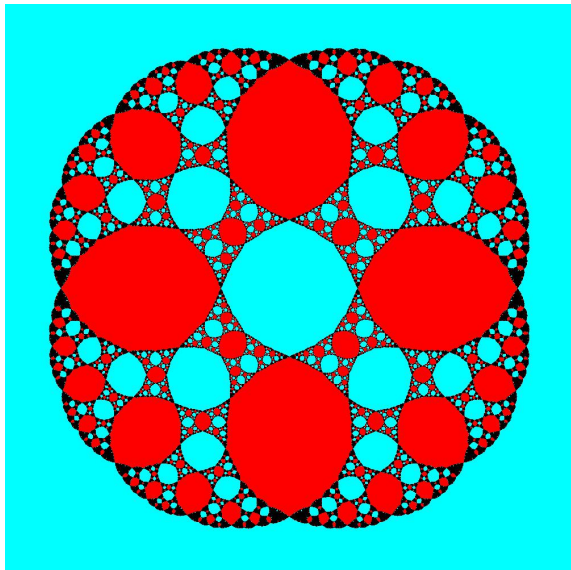
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 10



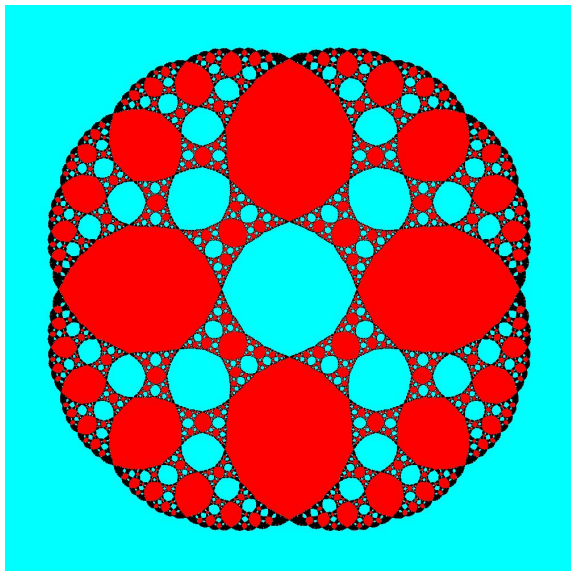
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 11



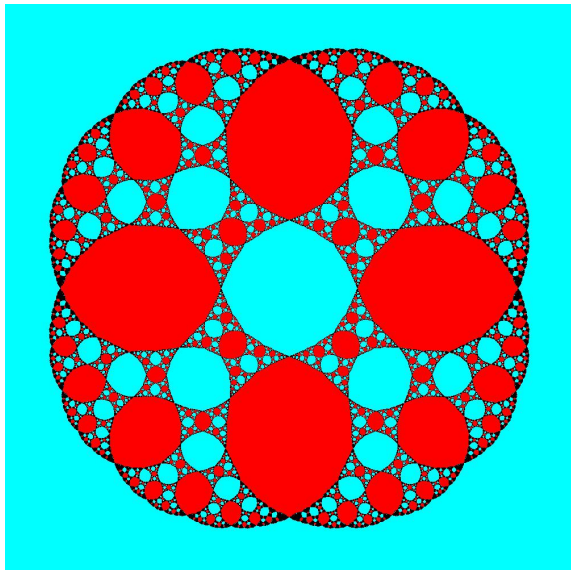
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 12



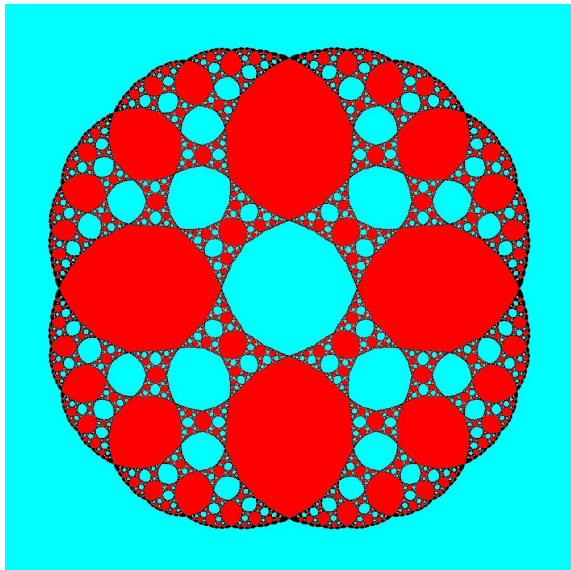
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 13



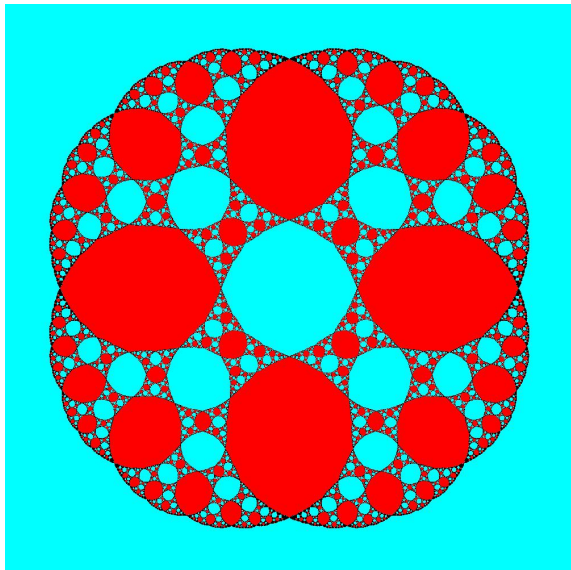
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 14



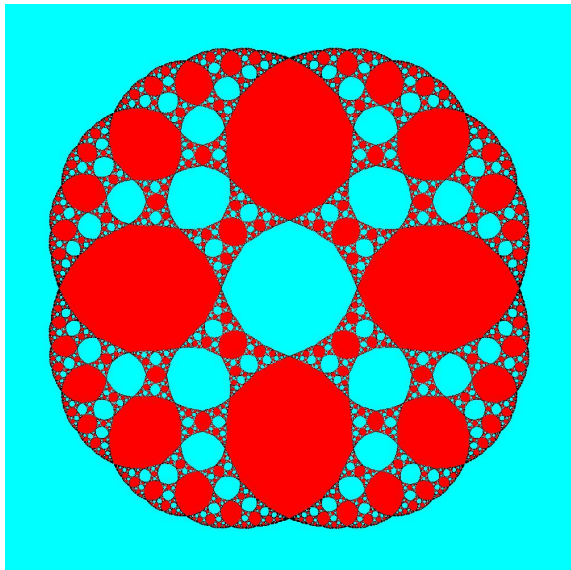
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 15



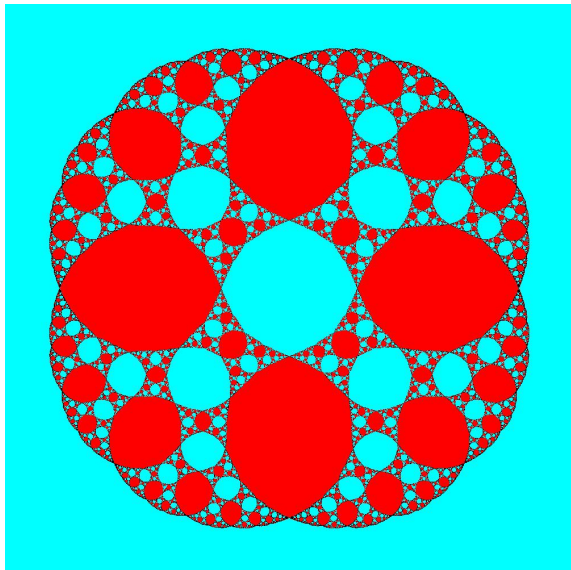
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 16



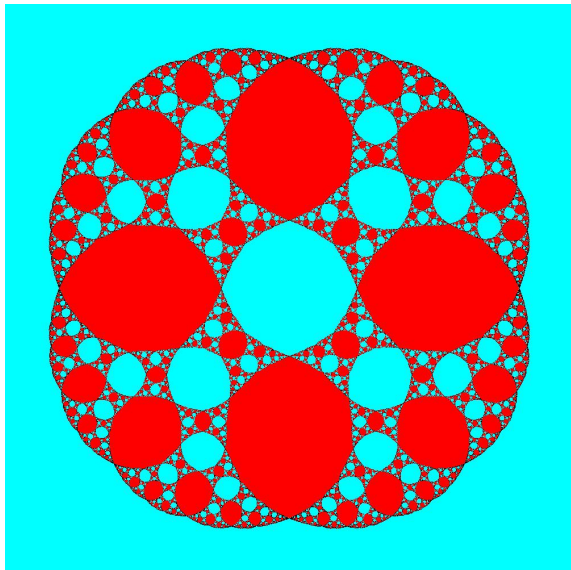
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 17



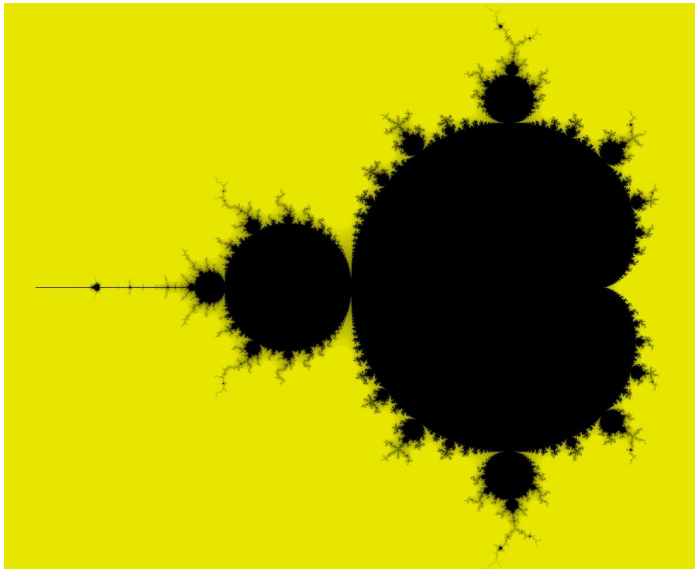
Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 18



Переклейка $z^2/(1 - z^2)$ в $(1 + z^2)/(1 - z^2)$: шаг 19



Плоскость параметров 1: $z^2 + c$



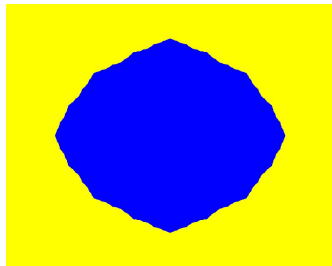
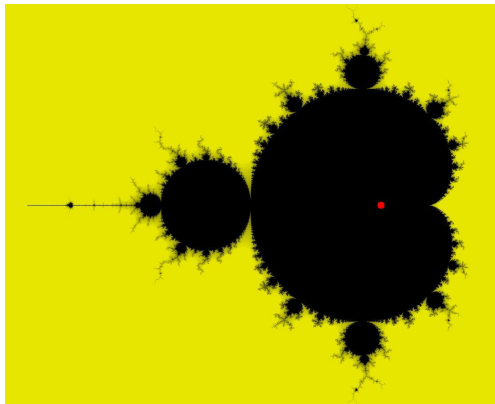
Множество Мандельброта

Множество Мандельброта — это множество комплексных чисел c , таких, что последовательность

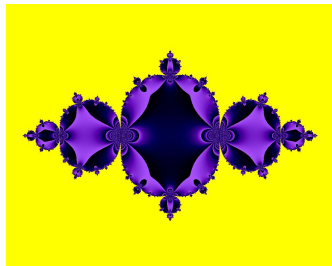
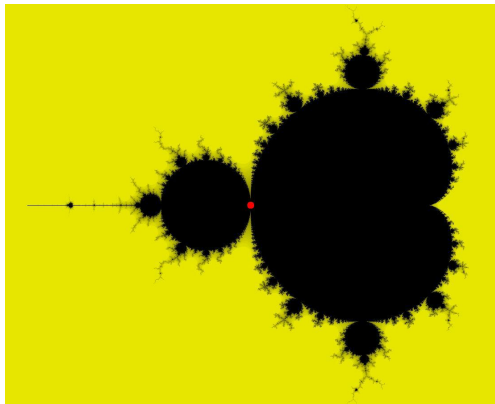
$$0, \quad c, \quad c^2 + c, \quad (c^2 + c)^2 + c, \quad \dots$$

ограниченна. Если $c \notin M$, то множество точек, не убегающих на бесконечность под действием итераций многочлена $z^2 + c$, гомеоморфно канторову множеству. Если $c \in M$, то это множество связно.

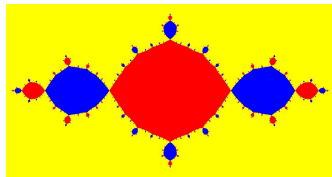
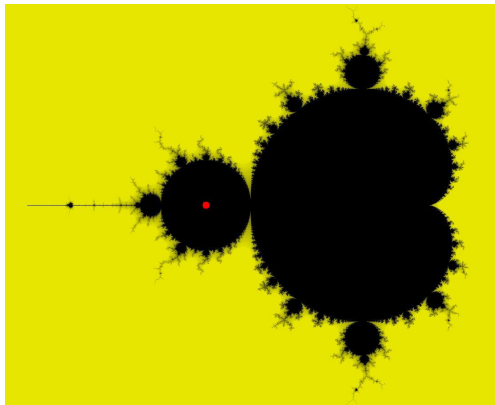
Плоскость параметров 1: $z^2 + c$



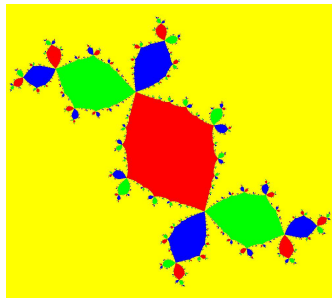
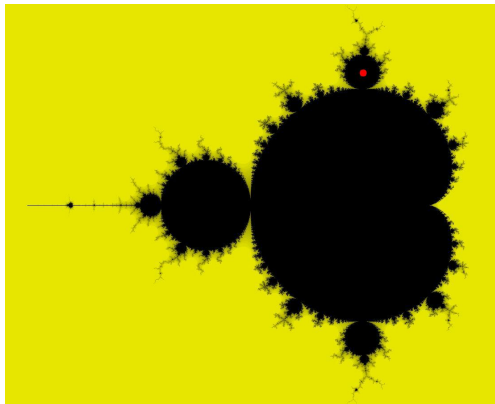
Плоскость параметров 1: $z^2 + c$



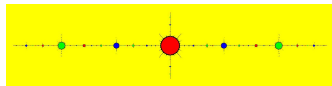
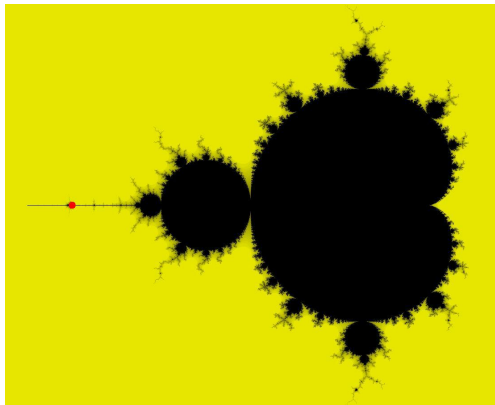
Плоскость параметров 1: $z^2 + c$



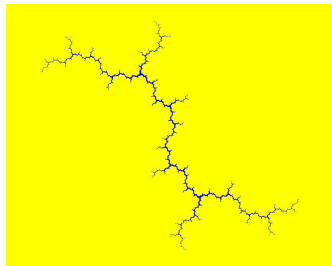
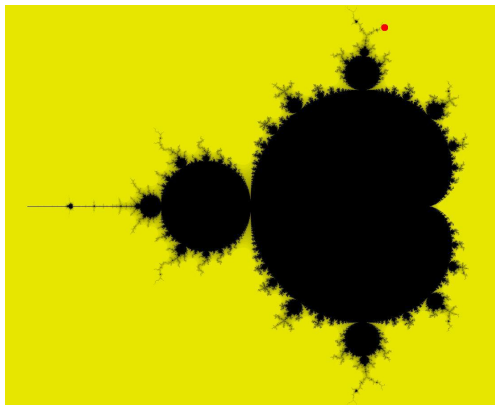
Плоскость параметров 1: $z^2 + c$



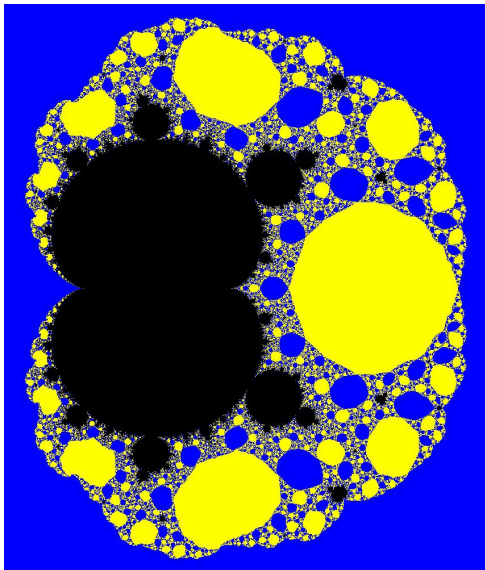
Плоскость параметров 1: $z^2 + c$



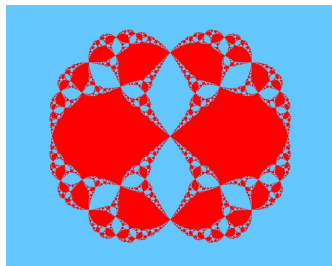
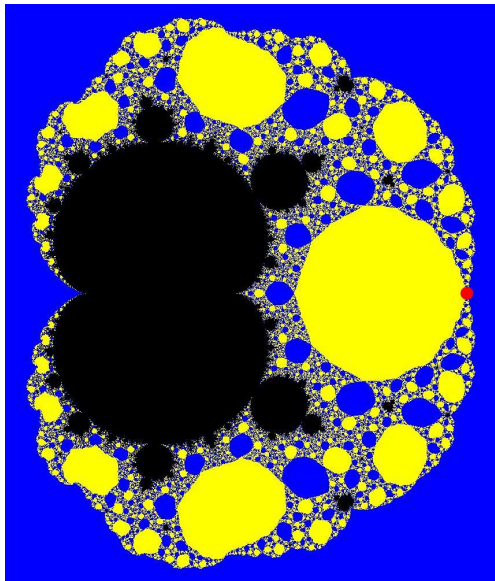
Плоскость параметров 1: $z^2 + c$



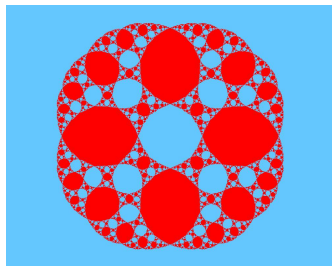
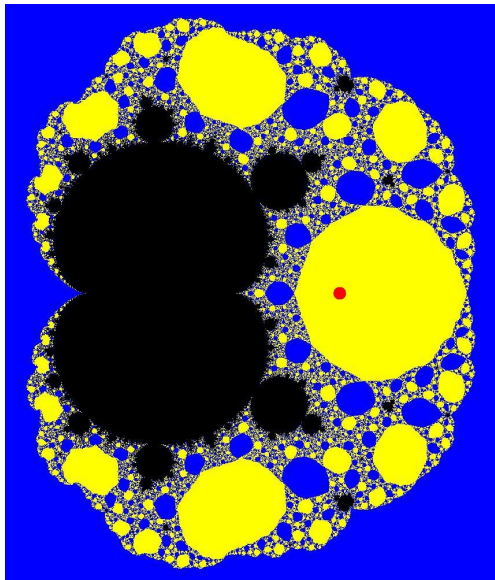
Плоскость параметров 2: $c/(z^2 + 2z)$



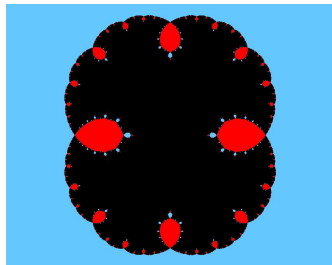
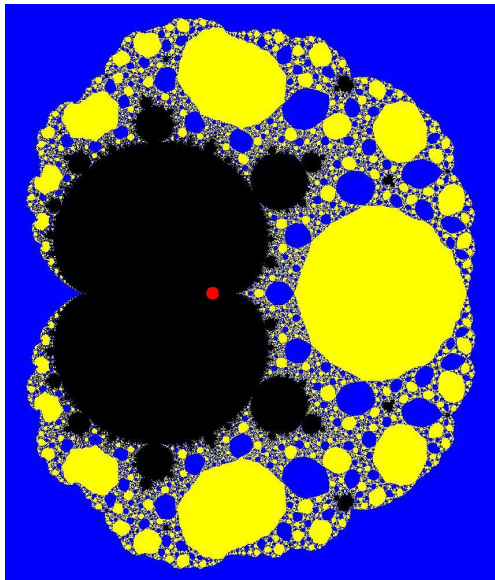
Плоскость параметров 2: $c/(z^2 + 2z)$



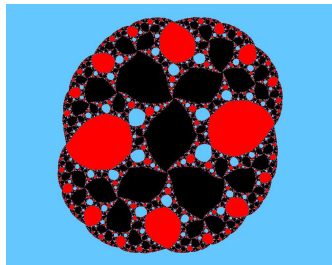
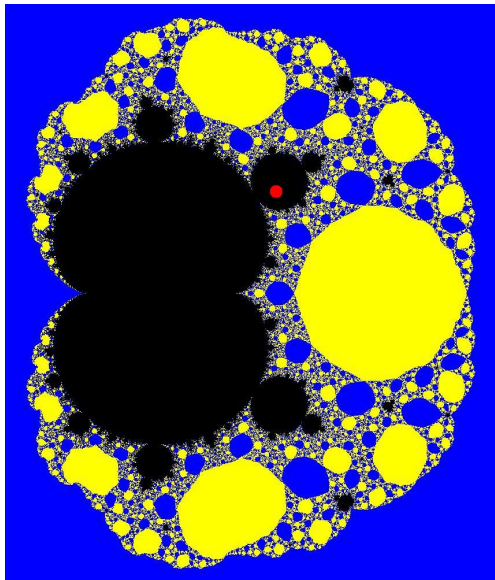
Плоскость параметров 2: $c/(z^2 + 2z)$



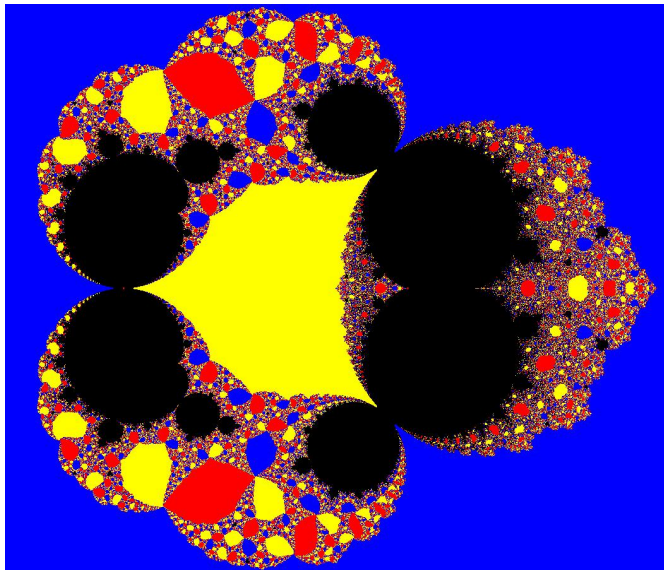
Плоскость параметров 2: $c/(z^2 + 2z)$



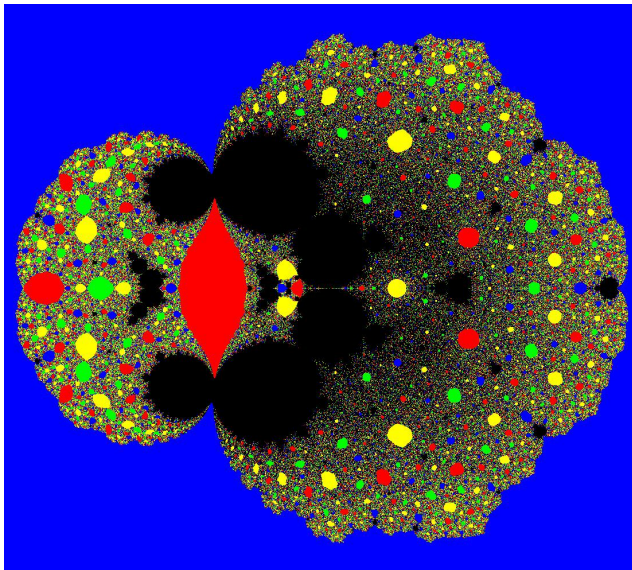
Плоскость параметров 2: $c/(z^2 + 2z)$



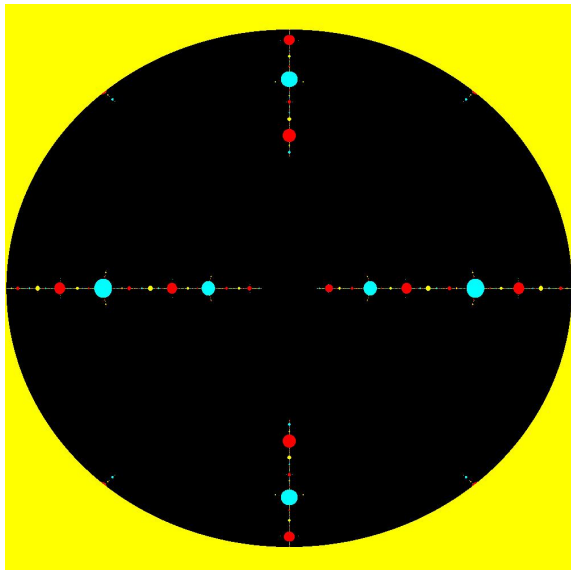
Плоскость параметров 3



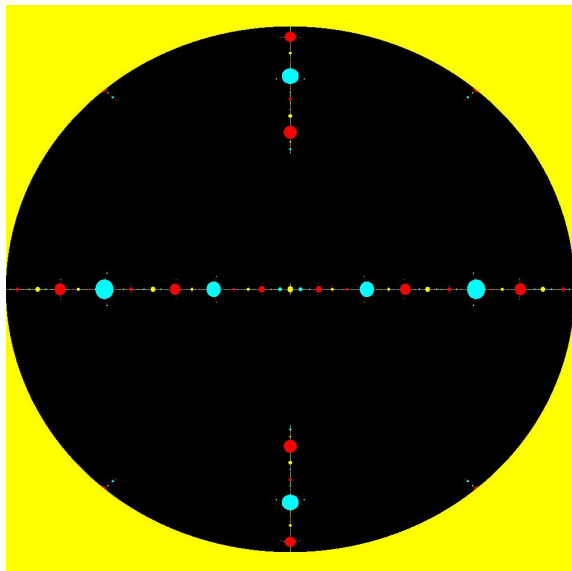
Плоскость параметров 4



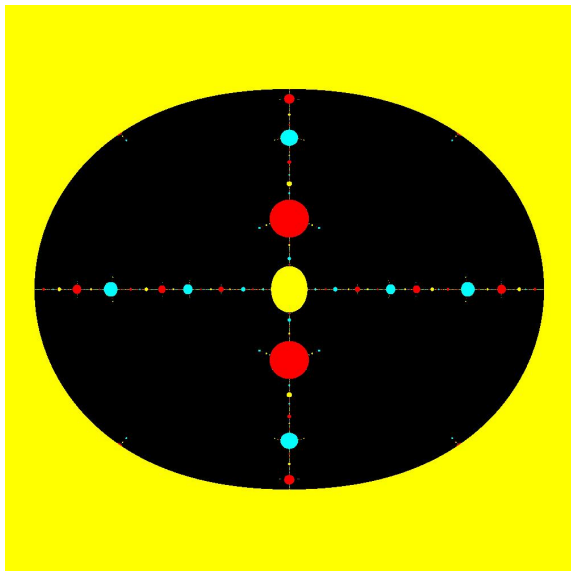
Переклейка самолета в ковер Серпинского



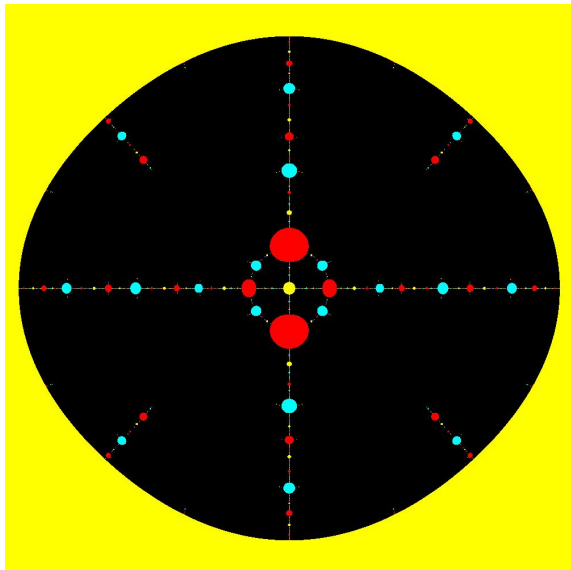
Переклейка самолета в ковер Серпинского



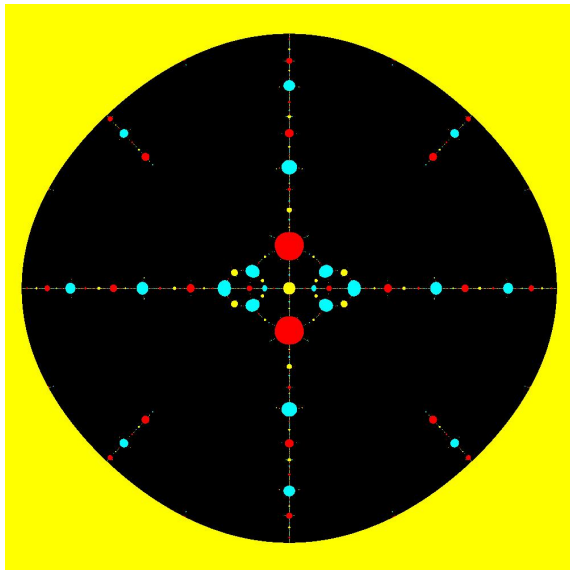
Переклейка самолета в ковер Серпинского



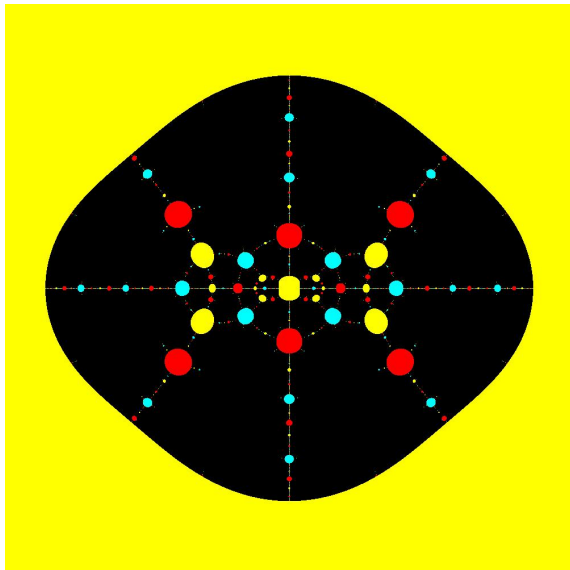
Переклейка самолета в ковер Серпинского



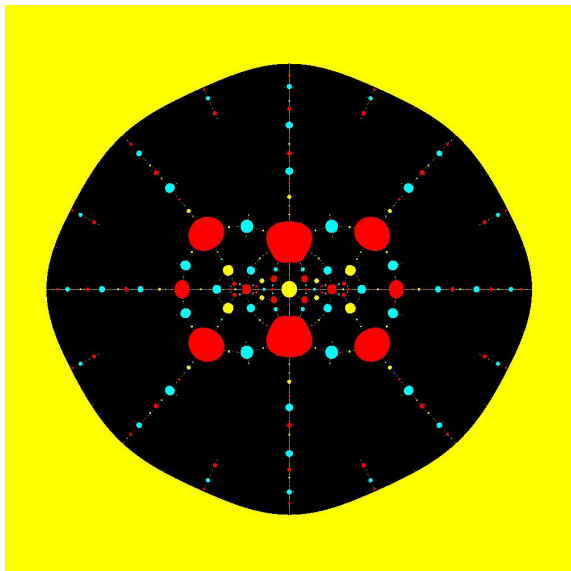
Переклейка самолета в ковер Серпинского



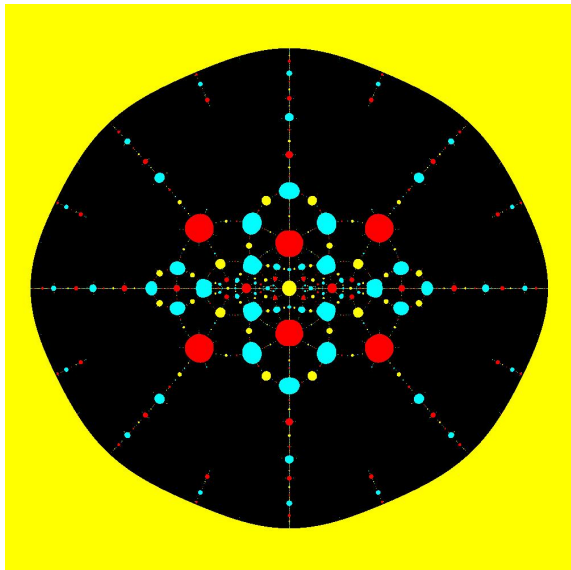
Переклейка самолета в ковер Серпинского



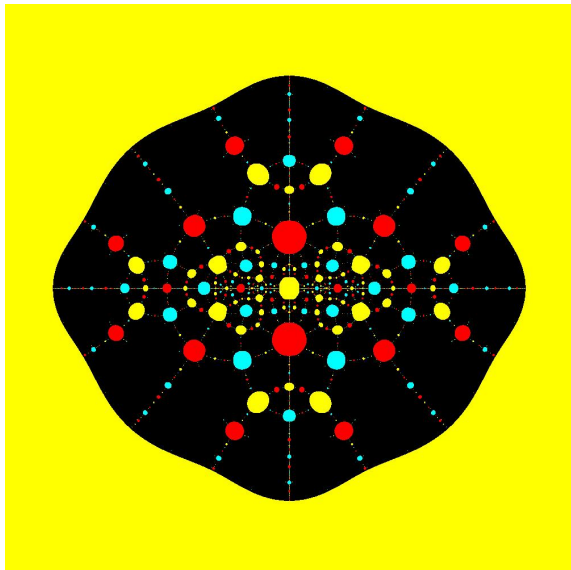
Переклейка самолета в ковер Серпинского



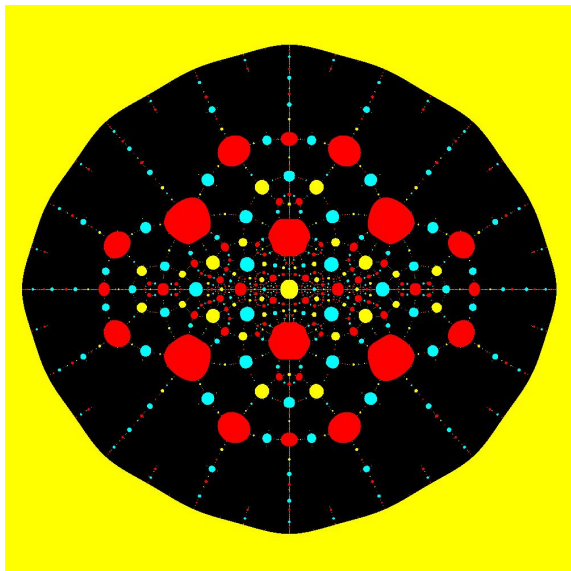
Переклейка самолета в ковер Серпинского



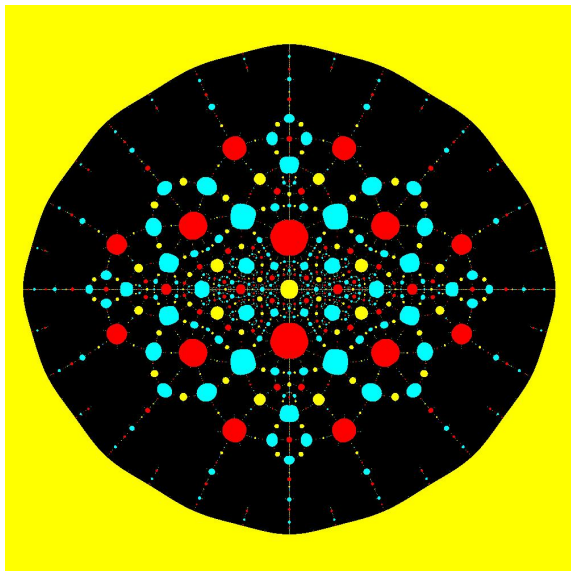
Переклейка самолета в ковер Серпинского



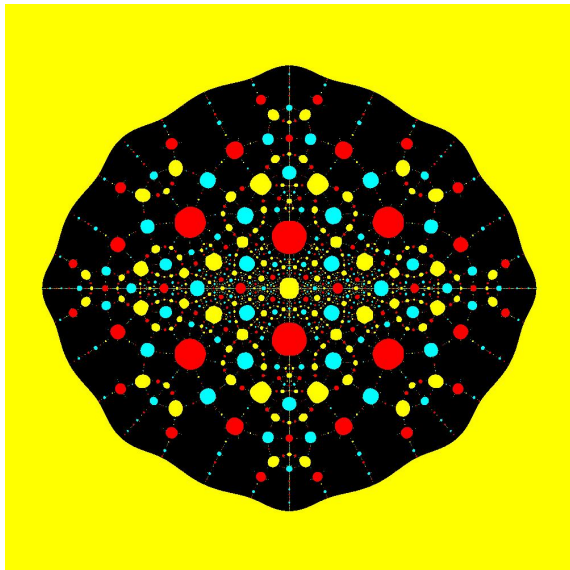
Переклейка самолета в ковер Серпинского



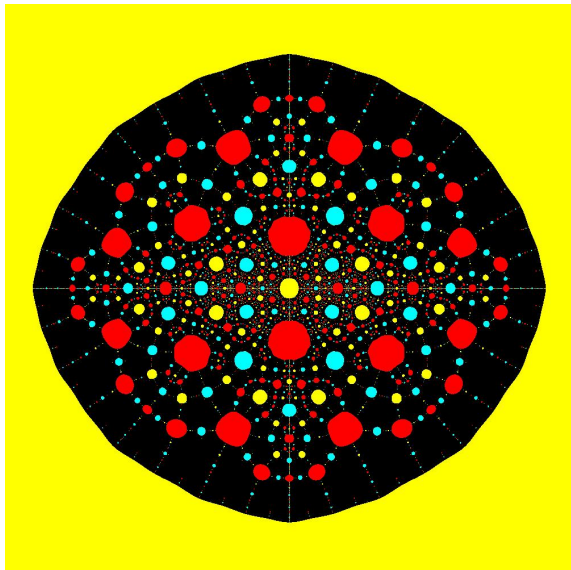
Переклейка самолета в ковер Серпинского



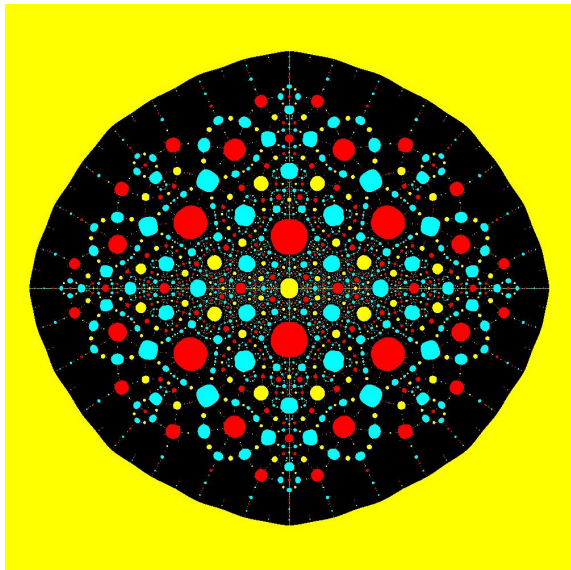
Переклейка самолета в ковер Серпинского



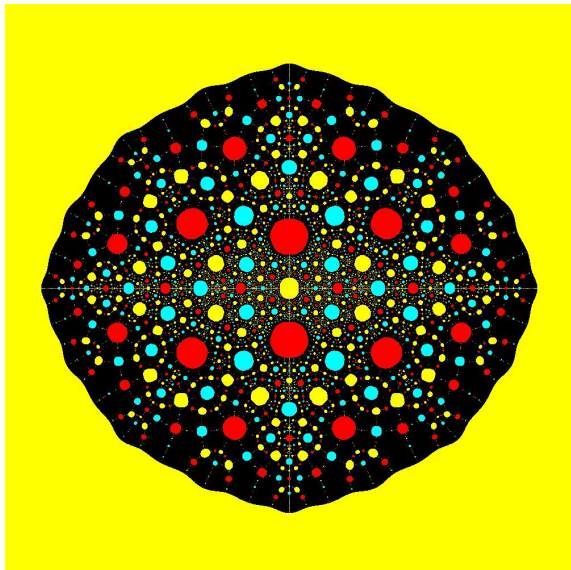
Переклейка самолета в ковер Серпинского



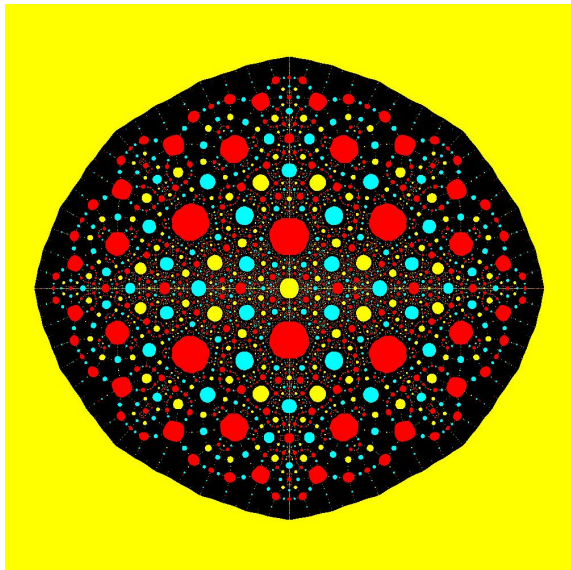
Переклейка самолета в ковер Серпинского



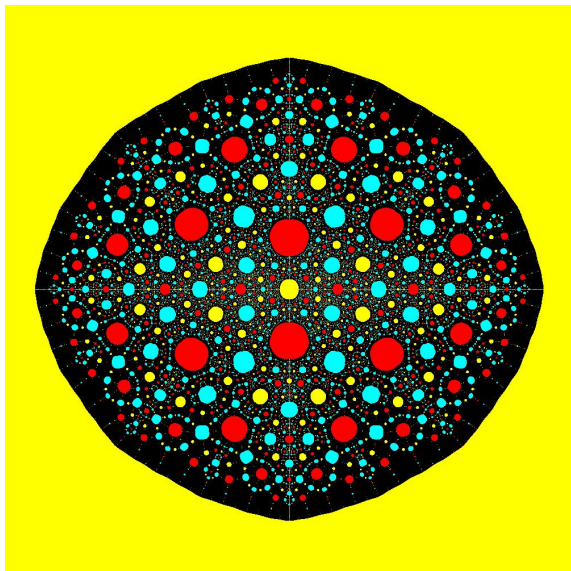
Переклейка самолета в ковер Серпинского



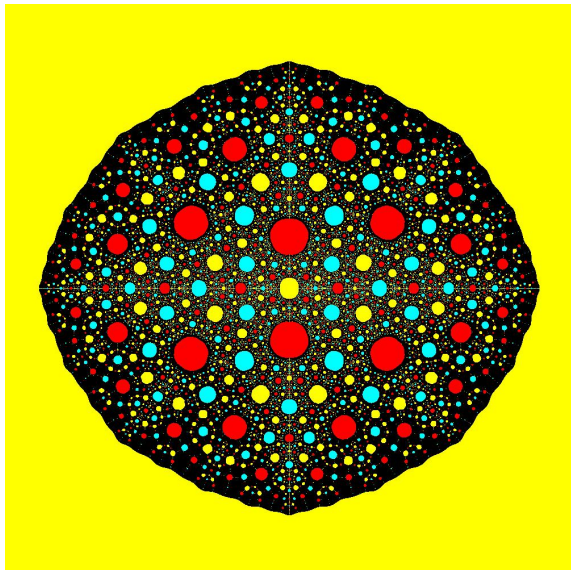
Переклейка самолета в ковер Серпинского



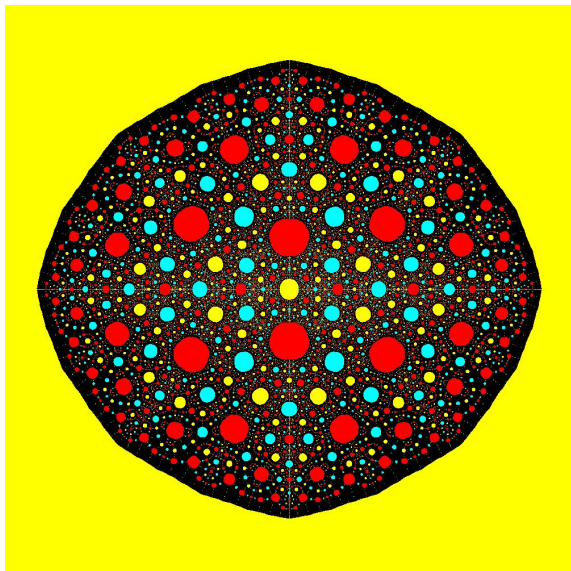
Переклейка самолета в ковер Серпинского



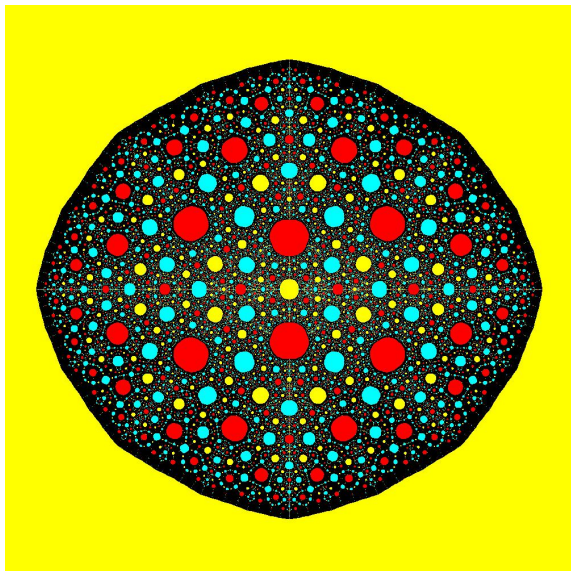
Переклейка самолета в ковер Серпинского



Переклейка самолета в ковер Серпинского



Переклейка самолета в ковер Серпинского



Переклейка самолета в ковер Серпинского

