

Выпуклая геометрия и геометрия многогранников связана почти со всеми разделами современной математики: алгеброй, геометрией, комбинаторикой, топологией, анализом, физикой. Многие фундаментальные факты из этих областей имеют такие элементарные отражения, как равенство Эйлера для многогранника (число граней – число ребер + число вершин = 2), формула Пика для многоугольника на клетчатой бумаге (площадь = число перекрестий внутри + (число перекрестий на границе)/2 – 1), неравенство Брунна-Минковского (корень из площади сечения выпуклого тела горизонтальной плоскостью на высоте  $z$  – вогнутая функция от  $z$ ), и т.д. Цель семинара – познакомиться с простым, но весьма разнообразным запасом классических фактов такого рода о многогранниках и выпуклых телах, а также использовать эти факты в качестве отправного пункта для экскурсов в другие области математики. Темы будут выбираться в зависимости от интересов слушателей и включать, например, следующее.

**МЕРЫ МНОГОГРАННИКОВ.** Примеры аддитивных мер многогранников – объем многогранника и число точек целочисленной решетки, попавших в многогранник. Мера зависит от многогранника алгебраически: например, число точек решетки в целочисленном многограннике  $P$ , увеличенном в  $K$  раз, оказывается многочленом от  $K$  и называется многочленом Эрхарта многогранника  $P$ . Тэги: *аддитивные меры, многочлен Эрхарта, многочлен объема, виртуальные многогранники, формула Шлефли, изгибаемые многогранники, 3я проблема Гильберта, инвариант Дэна, quermassintegrals, теорема Хадвигера о мерах, теоремы Минковского.*

**КОМБИНАТОРИКА МНОГОГРАННИКОВ.** Многие алгебраические объекты “визуализуются” разными многогранниками специального вида: симметрическая группа – ассоциэдрами и пермutoэдрами, торические многообразия – многогранниками с целыми координатами вершин, веса в теории представлений – многогранниками Гельфанда-Цетлина, дискриминанты и результаты – вторичными многогранниками, и т. д. Эта взаимосвязь оказывается полезной в обе стороны, как для изучения многогранников, так и для алгебраической геометрии. Тэги: *правильные многогранники,  $f$ - и  $h$ -векторы многогранника, теорема Эйлера, простые многогранники, соотношения Дэна-Соммервиля, пермutoэдр, ассоциэдр, числа Каталана, Шрёдера и Нараяны, вторичный многогранник, циклический многогранник, многогранник Гельфанда-Цетлина.*

**АНАЛИЗ И ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ.** Правильный способ получать классические неравенства анализа (а также теории вероятностей, статистической физики, теории информации и т.д.) – выпуклая геометрия. Например, неравенства Юнга, Гёльдера и т. д. являются частными случаями вышеупомянутого неравенства Брунна-Минковского. Выпуклые поверхности – один из главных объектов изучения римановой геометрии, и интересен их вырожденный случай – поверхность многогранника: бывают ли на ней замкнутые геодезические? сколько у нее диаметров? что для нее означает формула Гаусса-Бонне? Тэги: *изопериметрическое неравенство, сложение и интегрирование по Минковскому, смешанные объёмы, неравенство Брунна-Минковского, неравенство Александра-Фенхеля, преобразование Лежандра, геодезические и кривизна на многограннике.*

**СВЯЗЬ С ИСЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ.** Сколько общих нулей могут иметь  $N$  многочленов, состоящие из данного набора мономов от  $N$  комплексных переменных? Сколько существует полиномиальных отображений степени 3 проективной кривой в проективную плоскость, содержащих в своем образе восемь данных точек общего положения? Задачи такого типа относятся к исчислительной алгебраической геометрии, и часто решаются с помощью тропической геометрии, переводящей их в похожие задачи о кусочно-линейных объектах. Например, ответ на первый вопрос этого абзаца выглядит так: рассмотрим мономы от  $N$  переменных как точки  $N$ -мерной целочисленной решетки, назовем многогранником Ньютона многочлена выпуклую оболочку мономов, из которых он состоит, тогда число общих нулей  $N$  многочленов не превосходит объем их многогранника Ньютона. Тэги: *многогранник Ньютона, теорема Кушниренко, теорема Бернштейна, гладкие и нодальные плоские кривые, 16я проблема Гильберта, инварианты Громова-Виттена, патчворкинг, тропическое поле, тропические кривые, теорема соответствия Михалкина.*

Ближе к лету в анонсе появится список литературы по этим темам. Большая часть материала о многогранниках доступна первокурсникам, а связи с алгебраической геометрией, группами и алгебрами Ли, теорией представлений и т. д. интересны магистрантам. Пререквизиты отдельных докладов будут сообщаться в их анонсах, но НИС в целом будет доступен для всех курсов, включая первый.