

C^* -АЛГЕБРЫ

(спецкурс, осенний семестр 2012–2013 уч. года)

Лектор — доц. А. Ю. Пирковский

Теория C^* -алгебр — это алгебраическое направление в функциональном анализе, имеющее многочисленные связи и приложения в теории операторов, теории представлений, топологии, некоммутативной геометрии, теории квантовых групп. Грубо говоря, C^* -алгебра — это алгебра A над \mathbb{C} , снабженная нормой и инволюцией $A \rightarrow A$, $a \mapsto a^*$, согласованными друг с другом должным образом. Простейшие примеры — алгебра $C(X)$ непрерывных функций на компакте X и алгебра $\mathcal{B}(H)$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H .

Приведем лишь один пример, иллюстрирующий пользу C^* -алгебр вне анализа в его традиционном понимании. Фундаментальный результат о C^* -алгебрах — 1-я теорема Гельфанда–Наймарка — утверждает, что соответствие $X \leftrightarrow C(X)$ является антиэквивалентностью между категориями компактных топологических пространств и коммутативных C^* -алгебр с единицей. Таким образом, «мир компактов» — это, в некотором смысле, «коммутативная часть мира C^* -алгебр». Интересно, что многие топологические конструкции и даже целые теории удается распространить на C^* -алгебры. Такова, например, топологическая K -теория, которая, в сущности, полностью «вкладывается» в K -теорию C^* -алгебр вместе со своим базовым результатом — периодичностью Ботта.

Вышеупомянутая взаимосвязь между компактными пространствами и C^* -алгебрами оказалась очень плодотворной как для самой теории C^* -алгебр, так и для топологии. Она лежит в фундаменте как минимум двух наук — некоммутативной геометрии в духе А. Конна и теории компактных квантовых групп в духе С. Л. Вороновича.

В курсе предполагается познакомиться с основами теории C^* -алгебр и по возможности обсудить некоторые ее приложения (выбор которых будет осуществляться по согласованию со слушателями).

Прerequisites. Желательно знакомство с основными фактами функционального анализа (банаховы и гильбертовы пространства, ограниченные линейные операторы).

Краткая программа. Банаховы алгебры. Преобразование Гельфанда. C^* -алгебры. Основные конструкции. Базовые примеры — алгебры функций и операторов. 1-я теорема Гельфанда–Наймарка. Непрерывное функциональное исчисление. Положительные функционалы и представления. ГНС-конструкция. 2-я теорема Гельфанда–Наймарка (вложение C^* -алгебр в алгебру ограниченных операторов в гильбертовом пространстве). Продвинутое примеры — групповые C^* -алгебры, алгебра Тёплица, квантовые торы, AF-алгебры, алгебра Кунца. Приложения (на выбор слушателей): или теория операторов («полная» спектральная теорема, операторы Гильберта–Шмидта, ядерные операторы), или введение в K -теорию C^* -алгебр, или знакомство с компактными квантовыми группами.