Топологические векторные пространства

(спецкурс, весенний семестр 2012–2013 уч. года)

Лектор — доц. А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ в его традиционном понимании имеет дело преимущественно с банаховыми и, в частности, гильбертовыми пространствами. Однако многие классические векторные пространства обладают естественными топологиями, которые не задаются нормой. Таковы, например, многие пространства гладких, голоморфных и обобщенных функций. Теория топологических векторных пространств — наука о пространствах именно такого рода. Ее расцвет приходится на 1950-е гг., однако и сейчас (вопреки расхожему мнению, происходящему из не вполне компетентных источников) она продолжает развиваться — уже не столько в плане абстрактной теории, сколько в направлении приложений к дифференциальным операторам и многомерной комплексно-аналитической геометрии.

Еще одна наука, тесно связанная с топологическими векторными пространствами, — теория борнологических пространств. Грубо говоря, борнологическое пространство — это векторное пространство, на котором аксиоматически вводится понятие ограниченного множества. Каждое топологическое векторное пространство обладает несколькими естественными борнологиями, и наоборот, всякое борнологическое пространство обладает несколькими естественными топологиями. Борнологические пространства появились в 1960-х гг., но вскоре были почти забыты. Однако сравнительно недавно (около 10 лет назад) выяснилось, что борнологические пространства весьма удобны в некоторых вопросах некоммутативной геометрии — а именно, в бивариантной K-теории и в теории циклических гомологий. Это обусловило существенный всплеск интереса к борнологическим пространствам и привело к возрождению и дальнейшему развитию их теории.

В курсе предполагается познакомиться с основами теории топологических и борнологических векторных пространств и по возможности обсудить некоторые приложения (выбор которых будет осуществляться по согласованию со слушателями).

Пререквизиты. Желательно знакомство с основными фактами функционального анализа (банаховы и гильбертовы пространства, ограниченные линейные операторы).

Краткая программа. Топологические векторные пространства. Полунормы и локально выпуклые пространства. Основные конструкции. Примеры — пространства гладких, голоморфных, обобщенных функций. Метризуемость, полнота. Пространства Фреше. Двойственность. Слабая топология, топология Макки, сильная топология. Топологические тензорные произведения. Ядерные операторы. Ядерные пространства. Знакомство с борнологическими пространствами. Примеры, конструкции и сравнение борнологической и топологической категорий. Приложения (на выбор слушателей): или к теории обобщенных функций (теорема Шварца о ядре), или к комплексно-аналитической геометрии (теорема Картана-Серра о конечномерности когомологий когерентных пучков на компактном многообразии), или к циклическим гомологиям (целые и аналитические циклические гомологии борнологических алгебр).