Симметрические многочлены

Правила игры. Для получения максимальной оценки за листок достаточно решить 75% задач без звёздочек.

Напомним, что через σ_k обозначается k-й элементарный симметрический многочлен, а через s_k — k-я ньютоновская степенная сумма:

$$\sigma_k = \sum_{i_1<\dots<i_k} x_{i_1}\dots x_{i_k}; \qquad s_k = x_1^k + \dots + x_n^k.$$

◇ **1.1.** Найдите сумму квадратов и произведение всех комплексных корней многочлена: **а)** $3x^3 + 2x^2 - 1$; **б)** $x^4 - x^2 - x - 1$.

◇ **1.2.** Найдите сумму чисел, обратных к корням многочленов из предыдущей задачи.

◇ **1.3.** Выразите в виде многочленов от элементарных симметрических: **а)** $x_1^3 + \dots + x_n^3$; **б)** $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$; **в)** $(x_1x_2 + x_3)(x_1x_3 + x_2)(x_2x_3 + x_1)$.

◇ **1.4. а)** Рассмотрим многочлен $P(t) = (1 + x_1t)\dots(1 + x_nt)$ от переменных $x_1, \dots, x_n, t$. Докажите, что $P(t) = 1 + \sigma_1t + \sigma_2t^2 + \dots + \sigma_nt^n$.

б) Пусть $s_k = x_1^k + \dots + x_n^k$. Докажите, что $\frac{d}{dt}\ln P(t) = \sum_{k\ge1}(-1)^{k+1}s_kt^{k-1}$.

◇ **1.5.** Пусть

$$h_k = \sum_{i_1\le\dots\le i_k} x_{i_1}\dots x_{i_k}$$

Докажите, что: **а)** $P(t)^{-1} = \sum_{k\ge0}(-1)^kh_kt^k$;

б) $\sigma_k - h_1\sigma_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1}h_{k-1}\sigma_1 + (-1)^kh_k = 0$ при $k \ge 1$;

в) Каждый симметрический многочлен от n переменных является многочленом от $h_1, \dots, h_n$.

◇ **1.6 (Формулы Ньютона).** Докажите, что

$$s_k - \sigma_1s_{k-1} + \sigma_2s_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^kk\sigma_k = 0.$$

(Мы считаем, что $\sigma_k = 0$ при $k > n$).

◇ **1.7.** Докажите следующие детерминантные тождества:

а) $$s_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \dots & \sigma_1 & 1 \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \dots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix};$$ **б)** $$k!\cdot\sigma_k = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \dots & s_1 & 1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}.$$

◇ **1.8. а)** Дайте определение кососимметрического многочлена и докажите, что определитель Вандермонда $\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ является таковым.

б) Докажите, что всякий кососимметрический многочлен есть произведение симметрического и $\Delta(x_1, \dots, x_n)$.

в) Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — симметрический многочлен, равный 0 при $x_i = x_j$. Докажите, что $f(x_1, \dots, x_n) = \Delta^2 \cdot g(x_1, \dots, x_n)$, где g — симметрический многочлен.

Определение. *Разбиением числа n* называется набор λ целых неотрицательных чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_1 \ge \dots \ge \lambda_n \ge 0$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$.

◇ **1.9.** Пусть $p(n)$ — число разбиений числа n. Докажите, что $\prod_{m\ge0}(1 - t^m)^{-1} = \sum_{n\ge0}p(n)t^n$.

Определение. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — набор натуральных чисел. Пусть $a_\alpha = \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & \dots & x_n^{\alpha_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{\alpha_n} & \dots & x_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}$. В частности, если $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$, то a_δ — это определитель Вандермонда.

$\diamondsuit$ **1.10.** Докажите, что a_α образуют базис в пространстве кососимметрических многочленов.

$\diamondsuit$ **1.11 (Многочлены Шура).** Пусть λ — разбиение. Положим $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = a_{\lambda+\delta}/a_\delta$. Докажите, что:

а) $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ — целочисленный симметрический многочлен;

б) $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ при всевозможных λ образуют базис векторного пространства симметрических многочленов от $x_1, \ldots, x_n$;

в) Если $\lambda = (1, \ldots, 1)$, то $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_n$;

г) Если $\lambda = (n, 0, \ldots, 0)$, то $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = h_n$.

$\diamondsuit$ **1.12.** Выпишите явно многочлены Шура при $n = 2$ и $n = 3$ для всевозможных разбиений **а)** числа 3; **б)** числа 4.

$\diamondsuit$ **1.13.** Докажите, что $s_\delta = \prod_{i<j}(x_i + x_j)$.

$\diamondsuit$ **1.14* (Формулы Коши).** Докажите тождества:

а) $\prod_{i,j=1}^{n}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x_1, x_2, \ldots) s_\lambda(y_1, y_2, \ldots)$;

б) $\prod_{i,j=1}^{n}(1 + x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x_1, x_2, \ldots) s_{\lambda^*}(y_1, y_2, \ldots)$, где λ^* — разбиение, сопряжённое к λ.

$\diamondsuit$ **1.15* (Формулы Пьери).** Пусть λ — разбиение (будем представлять его как диаграмму Юнга). Обозначим через $\lambda \otimes k$ (соотв. $\lambda \otimes 1^k$) множество разбиений, полученных из данного добавлением к соответствующей диаграмме Юнга k клеточек, из которых никакие две не лежат в одном столбце (соотв. в одной строке). Докажите, что:

а) $s_\lambda \sigma_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1^k} s_\mu$; **б)** $s_\lambda h_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} s_\mu$.

$\diamondsuit$ **1.16* (Формулы Якоби–Труди).** Пусть λ — разбиение с не более чем n ненулевыми компонентами. Докажите, что:

а) $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \le i,j \le n}$; **б)** $s_{\lambda^*} = \det(\sigma_{\lambda_i - i + j})_{1 \le i,j \le n}$.