

1.1. Докажите сходимость следующих несобственных интегралов и вычислите их:

$$1)^\circ \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}; \quad 2)^\circ \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b); \quad 3) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

1.2. Исследуйте следующие несобственные интегралы на сходимость и абсолютную сходимость:

$$1)^\circ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}; \quad 2)^\circ \int_0^1 \frac{dx}{(x-\sin x)^p} \quad (p \in \mathbb{R}); \quad 3) \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx \quad (p \in \mathbb{R});$$

$$4) \int_\pi^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx \quad (p, q \in \mathbb{R}); \quad 5)^\circ \int_0^{+\infty} \cos(x^3) dx.$$

1.3. Докажите, что несобственные интегралы

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx$$

сходятся, и вычислите их. (*Указание:* чтобы их вычислить, полезно их сложить.)

1.4. 1) Исследуйте на сходимость несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^p)}{x^q} dx \quad (p, q \in \mathbb{R}).$

2) Выведите из п. 1, что несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \sin(x^p) dx$ сходится для всех $p > 1$.

1.5. Пусть f — кусочно непрерывная монотонная функция на $[0, +\infty)$. Предположим, что несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Докажите, что $f(x) = O(1/x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (и, как следствие, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$).

1.6. Пусть f — функция на $[0, +\infty)$. Предположим, что существует такая константа $C > 0$, что $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ для всех $x, y \in [0, +\infty)$ (например, это заведомо так, если f дифференцируема и ее производная ограничена). Докажите, что если несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1.6^o. Сохраняют ли силу признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов, если отказаться от требований монотонности?