Нормы на конечномерных пространствах

Для каждого $p \in [1, +\infty]$ введем норму $\|\cdot\|_p$ на пространстве $\mathbb{C}^n$ формулой

$$\|x\|_p = \Bigl(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Bigr)^{1/p} \qquad \text{при } p < \infty; \tag{1}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n). \tag{2}$$

То, что это действительно норма, при $p = 1$ и при $p = \infty$ проверяется непосредственно (убедитесь), а при $p = 2$ было доказано на лекции. Для произвольного p в проверке нуждается лишь неравенство треугольника (выполнение остальных аксиом нормы очевидно) . Неравенство треугольника для нормы $\|\cdot\|_p$ на $\mathbb{C}^n$ называется *неравенством Минковского*; его мы, как и два других полезных неравенства, пока примем на веру (см. ниже домашнее задание). Аналогично вводятся нормы $\|\cdot\|_p$ на действительном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Если V — нормированное пространство, то его *единичным шаром* по умолчанию называется замкнутый шар единичного радиуса с ценром в нуле.

Упражнение 1.1. **1)** Нарисуйте единичный шар на плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$. **2)** Что происходит с единичным шаром $\{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\|_p \leqslant 1\}$ с ростом p? (*Ответ*: он растет.)

Упражнение 1.2. Пусть $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — две нормы на векторном пространстве V, и пусть B и B' — соответстующие единичные шары. Докажите, что $B \subseteq B' \iff \|\cdot\|' \leqslant \|\cdot\|$.

Из предыдущих упражнений следует, что если $p \leqslant q$, то $\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_p$ на $\mathbb{R}^2$. Посмотрим, как обстоят дела в $\mathbb{C}^n$.

Упражнение 1.3. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$.
1) Докажите, что $\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_1$ на $\mathbb{C}^n$.
2) Докажите, что $\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_p$ на $\mathbb{C}^n$.
3) Докажите, что существует такая константа $C = C_{n,1,q} > 0$, что $\|\cdot\|_1 \leqslant C\|\cdot\|_q$ на $\mathbb{C}^n$.
4) Докажите, что существует такая константа $C = C_{n,p,q} > 0$, что $\|\cdot\|_p \leqslant C\|\cdot\|_q$ на $\mathbb{C}^n$.
5) Найдите наименьшую константу $C_{n,p,q}$ с указанным свойством (сначала для $p = 1$, затем в общем случае). Интерпретируйте ответ как норму некоторого оператора. (*Ответ*: наименьшая $C_{n,p,q}$ равна $n^{1/p-1/q}$.)

Определение 1.1. Пусть $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — нормы на векторном пространстве V. Говорят, что $\|\cdot\|$ *мажорирует* $\|\cdot\|'$ (и пишут $\|\cdot\|' \prec \|\cdot\|$), если $\|\cdot\|' \leqslant C\|\cdot\|$ для некоторого $C > 0$. Нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ называются *эквивалентными* ($\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$), если одновременно $\|\cdot\|' \prec \|\cdot\|$ и $\|\cdot\| \prec \|\cdot\|'$.

Из пп. 2 и 4 упражнения 1.3 следует, что на $\mathbb{C}^n$ все нормы вида $\|\cdot\|_p$, где $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, эквивалентны друг другу. Скоро мы убедимся, что на конечномерном векторном пространстве *любые* две нормы эквивалентны друг другу.

Домашнее задание

ДЗ 1.1. Пусть $p, q \in (1, +\infty)$, и пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
1) Докажите *неравенство Юнга*:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (a, b \geqslant 0).$$

2) Из неравенства Юнга выведите *неравенство Гёльдера*:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n). \tag{3}$$

3) Из неравенства Гёльдера выведите *неравенство Минковского*:

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n). \tag{4}$$

ДЗ 1.2. Пусть c_{00} — пространство всех *финитных* последовательностей (т.е. числовых последовательностей $x = (x_n)$, для каждой из которых существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n = 0$ для всех $n > N$). Нормы $\| \cdot \|_p$ ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$) на c_{00} вводятся так же, как и на $\mathbb{C}^n$ (с той лишь разницей, что суммирование в (1) происходит от 1 до ∞, и в (2) вместо $\max_{1 \leqslant i \leqslant n}$ надо писать $\sup_{i \in \mathbb{N}}$). Эквивалентны ли нормы $\| \cdot \|_p$ и $\| \cdot \|_q$ на c_{00} при $p \neq q$?

Как обычно, через $C[a, b]$ обозначается пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Для каждого $p \in [1, +\infty]$ введем норму $\| \cdot \|_p$ на $C[a, b]$ формулой

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \Big)^{1/p} \qquad \text{при } p < \infty;$$
$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \qquad (f \in C[a, b]).$$

То, что это действительно норма, при $p = 1$ и при $p = \infty$ проверяется непосредственно (убедитесь), а при $p = 2$ было доказано на лекции. Для произвольного p в проверке нуждается лишь неравенство треугольника (выполнение остальных аксиом нормы очевидно). Как и в случае с пространством $\mathbb{C}^n$, неравенство треугольника для нормы $\| \cdot \|_p$ на $C[a, b]$ называется *неравенством Минковского* (см. следующую задачу).

ДЗ 1.3. 1) Сформулируйте и докажите «интегральные» аналоги неравенств Гёльдера и Минковского (3) и (4).
2) Эквивалентны ли нормы $\| \cdot \|_p$ и $\| \cdot \|_q$ на $C[a, b]$ при $p \neq q$?