Нормированные пространства и ограниченные операторы

Разбирались задачи ДЗ.1.1-ДЗ.1.3 из домашнего задания. Ответы к ДЗ.1.2 и ДЗ.1.3 (2): нормы не эквивалентны.

Дадим топологическую интерпретацию понятий мажорирования и эквивалентности норм (см. семинар 1). Для этого нам понадобится следующее утверждение, которое было сформулировано на лекции в виде задачи.

Упражнение 2.1. Пусть X и Y — нормированные пространства, $T\colon X \to Y$ — линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:

1) T ограничен;
2) T непрерывен;
3) T непрерывен в некоторой точке $x_0 \in X$.

Отсюда получаем такое следствие:

Упражнение 2.2. Пусть $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — нормы на векторном пространстве X, $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}'$ — порожденные ими топологии на X. Тогда

$$\|\cdot\|' \prec \|\cdot\| \iff \mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}.$$

В частности, нормы эквивалентны тогда и только тогда, когда они задают одну и ту же топологию.

Приведем еще несколько примеров нормированных пространств.

Пример 2.1. Зафиксируем число $p \in [1, +\infty)$ и положим

$$\ell^p = \Big\{ x = (x_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \Big\}.$$

Из неравенства Минковского следует, что ℓ^p — векторное подпространство в $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ и что формула

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad (x = (x_i) \in \ell^p)$$

задает норму на ℓ^p (обратите внимание, что при $p = 1$ эти два утверждения очевидны.) Следовательно, ℓ^p — нормированное пространство.

Пример 2.2. Обозначим через ℓ^∞ подпространство в $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, состоящее из всех ограниченных последовательностей. Оно является нормированным пространством относительно *равномерной нормы*

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \qquad (x = (x_i) \in \ell^\infty).$$

Пример 2.3. Символом c_0 обозначается множество всех числовых последовательностей, стремящихся к нулю на бесконечности. Очевидно, c_0 — векторное подпространство в ℓ^∞, поэтому оно является нормированным пространством относительно равномерной нормы.

Упражнение 2.3. Если $1 \leqslant p < q < +\infty$, то $\ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset \ell^\infty$, и все эти включения строгие.

Упражнение 2.4. Докажите, что нормированное пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда в нем есть плотное векторное подпространство не более чем счетной размерности.

Упражнение 2.5. Докажите, что c_{00} плотно в c_0 и в ℓ^p при $p < \infty$. Как следствие, пространства c_0 и ℓ^p при $p < \infty$ сепарабельны.

Домашнее задание

ДЗ 2.1. Докажите, что на конечномерном векторном пространстве любые две нормы эквивалентны.

ДЗ 2.2. Пусть $p, q \in [1, +\infty]$.
1) При каких условиях на p и q норма $\|\cdot\|_q$ на $C[a,b]$ мажорирует норму $\|\cdot\|_p$?
2) При выполнении условий п. 1 найдите наименьшую константу $C \geqslant 0$, такую, что $\|\cdot\|_p \leqslant C\|\cdot\|_q$ на $C[a,b]$.

ДЗ 2.3. 1) Докажите, что пространства c_0 и ℓ^p $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ полны.
2) Полно ли пространство c_{00} относительно нормы $\|\cdot\|_p$, где $1 \leqslant p \leqslant +\infty$?
3) Полно ли пространство $C[a,b]$ относительно нормы $\|\cdot\|_p$, где $1 \leqslant p \leqslant +\infty$?

ДЗ 2.4. Сепарабельны ли пространства **1)** ℓ^∞? **2)** $C[a,b]$ относительно нормы $\|\cdot\|_p$, где $1 \leqslant p \leqslant +\infty$?