1. Пусть Γ — конечная абелева группа, k — поле.

a) Докажите, что если характеристика поля k не делит порядок группы Γ, то групповая алгебра $k[\Gamma]$ является прямой суммой полей;

b) Разложите алгебру $k[\Gamma]$ в прямую сумму неразложимых в случае, когда характеристика k делит порядок группы Γ.

2. Пусть A — конечномерная алгебра, и $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ — два разложения A в сумму неразложимых двусторонних идеалов. Докажите, что тогда $n = m$, и существует перестановка σ такая, что $B_j = A_{\sigma(j)}$.

3. Докажите, что алгебра $n \times n$-матриц проста.

4. Докажите, что грассманова алгебра и алгебра многочленов неразложимы.

5. Докажите, что алгебра дифференциальных операторов на прямой с полиномиальными коэффициентами проста.

6. $x^i(\frac{\partial}{\partial x})^j \cdot x^k(\frac{\partial}{\partial x})^l = \sum_{r,s} a_{rs}^{ijkl} x^r (\frac{\partial}{\partial x})^s$. Вычислите коэффициенты a_{rs}^{ijkl}.

7. a) Найдите в алгебре 2×2-матриц два элемента x, y, которые ее порождают. Опишите все соотношения между x и y. Иными словами, имеется сюръективный гомоморфизм из свободной алгебры с двумя образующими $\phi: \; L(a,b) \to Mat_2$; $a \mapsto x$, $b \mapsto y$. Соотношения между x и y — это ядро ϕ, образующее двусторонний идеал $J \subset L(a,b)$. Он порождается (как идеал) неким набором элементов $s_1, \ldots, s_r$ (быть может, и бесконечным). Описать соотношения — значит явно указать какой-нибудь набор $\{s_i\}$. В нашем случае надо показать, что можно выбрать конечный набор $\{s_i\}$ и постараться выбрать его поэкономнее.

$b)^*$ То же самое для $n \times n$-матриц. Хотя бы найдите систему из двух образующих.

8. Алгебра Темперли-Либа $A_{\beta,k}$ — это комплексная алгебра, порожденная элементами $e_1, \ldots, e_{k-1}$ и соотношениями $e_i^2 = e_i$; $e_ie_j = e_je_i$ при $|i-j| > 1$; $\beta e_ie_je_i = e_i$ при $|i-j| = 1$ (здесь β — фиксированный комплексный параметр). Иными словами, $A_{\beta,k}$ — это фактор свободной алгебры $L(a_1, \ldots, a_{k-1})$ по двустороннему идеалу, порожденному элементами $a_i^2 - a_i, a_ia_j - a_ja_i$ при $|i-j| > 1$ и т.д.

a) Докажите, что $A_{\beta,k}$ — конечномерная алгебра, и найдите ее размерность при $k = 3$;

b) при $k = 4$;

$c)^*$ Догадайтесь до формулы для размерности при общем k;

d) Докажите, что при общем β (то есть при всех β, кроме конечного числа) алгебра $A_{\beta,3}$ — прямая сумма матричных алгебр.

e) Найдите исключительные значения β из предыдущего пункта.

9. Пусть x, y — две переменные такие, что $yx = qxy$, где q — фиксированный комплексный параметр. Образуем две алгебры: a) косые многочлены с базисом, как в обычных многочленах: $\{x^iy^j\}$ и произведением $x^iy^j \cdot x^ky^l = q^{jk}x^{i+k}y^{j+l}$; b) косые формальные степенные ряды: ее элементы — это формальные ряды $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}x^iy^j$. Умножение таких рядов определяется очевидным образом.

a) Найдите коэффициенты в биноме Ньютона в косых многочленах $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q x^ky^{n-k}$;

b) Найдите ряд $\sum_{i=0}^\infty a_ix^i =: \exp_q(x)$, играющий роль экспоненты, т.е. такой, что $\exp_q(x)\exp_q(y) = \exp_q(x+y)$.