Результант и дискриминант

Правила игры. Для получения максимальной оценки за листок достаточно решить 80% задач без звёздочек.

♢ **2.1.** Докажите, что $Res(f, gh) = Res(f, g)Res(f, h)$.

♢ **2.2.** Вычислите результант многочленов:
а) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $2x^2 - x - 1$; **б)** $3x^3 + 2^2 + x + 1$ и $2x^3 + x^2 - x - 1$.

♢ **2.3.** Найдите все значения λ, при которых имеют общий корень многочлены
а) $x^3 - \lambda x + 2$ и $x^3 + \lambda x + 2$; **б)** $x^3 - 2\lambda x + \lambda^3 x$ и $x^2 + \lambda^2 - 2$.

♢ **2.4.** Исключите x из системы уравнений:
а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3; \\ x^2 y + xy^2 = 6. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^3 - xy - y^3 + y = 0; \\ x^2 + x - y^2 = 1. \end{cases}$

♢ **2.5.** **а)** Докажите, что $D[(x - a)f(x)] = D[f(x)] \cdot f(a)^2$.
б) Пусть f и g — неприводимые многочлены. Докажите, что $D(fg) = D(f)D(g)[Res(f, g)]^2$.

♢ **2.6.** Вычислите дискриминант многочленов:
а) $ax^2 + bx + c$; **б)** $x^3 + px + q$; **в)** $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$;
г) $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$; **д)** $x^n + a$; **е)** $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

♢ **2.7.** Найдите все значения λ, при которых имеют кратный корень многочлены:
а) $x^3 - 3x + \lambda$; **б)** $x^4 - 4x + \lambda$; **в)** $x^4 - 4x^3 + (2 - \lambda)x^2 + 2x - 2$.

♢ **2.8.** Вычислите дискриминант:
а) многочленов Эрмита $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$;
б) многочленов Лагерра $L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$;
в) многочленов Чебышёва $P_n(x) = 2\cos(n \arccos(x/2))$.

Циклотомические многочлены

Пусть n — натуральное число, $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Существуют ровно $\varphi(n)$ *первообразных корней из единицы* степени n, т.е. таких чисел $\zeta \in \mathbb{C}$, что $\zeta^n = 1$, а никакая меньшая степень ζ не равна 1. Циклотомический многочлен, или многочлен деления круга, степени n определяется по формуле

$$\Phi_n(x) = \prod (x - \zeta_i),$$

где $\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varphi(n)}$ — первообразные корни из 1.

♢ **2.9.** Выпишите циклотомические многочлены $\Phi_n(x)$ при n равном: **а)** 2; **б)** 3; **в)** 4; **г)** 6; **д)** p; **е)** p^k, где p — простое число.

♢ **2.10.** Докажите следующие свойства циклотомических многочленов:
а) $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$; **б)** $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$, где n — нечётное число, большее 1;
в*) $\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}$, где $\mu(m)$ — *функция Мёбиуса*, определяемая формулой

$$\mu(m) = \begin{cases} 1, & m \text{ есть произведение четного числа различных простых сомножителей;} \\ -1, & m \text{ есть произведение нечетного числа различных простых сомножителей;} \\ 0 & m \text{ не свободно от квадратов.} \end{cases}$$

♢ **2.11.** **а)** Докажите, что коэффициенты $\Phi_n(x)$ целые, а его свободный член равен 1 при $n > 1$.
б) Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $\Phi_n(x)$.
в*) Докажите, что многочлен $\Phi_n(x)$ неприводим.
Указание. Докажите, что если ζ — корень одного из неприводимых сомножителей Φ_n, то ζ^p — корень *того же* сомножителя (где p — произвольное простое число, не делящее n).

♢ **2.12*.** Вычислите: **а)** $D(\Phi_n(x))$; **б)** $Res(\Phi_n(x), x^m - 1)$; **в)** $Res(\Phi_n(x), \Phi_m(x))$.