Прикладные методы анализа. Листок 1. Преобразование Лапласа

Решение задач 1 (все пункты), 2а. 2б, 2в, 2е, 4 (все пункты), 6, 7 входит в необходимые условия получения зачета и допуска к экзамену. Последний срок сдачи этих задач – 27 сентября.

Определение.

Оригиналом называется функция $f(t)$ вещественного аргумента t, удовлетворяющая условиям:

(1) $f(t) = 0$ при $t < 0$

(2) $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера всюду, кроме отдельных изолированных точек, где она имеет разрывы 1 рода, т.е., для всех t, кроме отдельных изолированных точек,

$$|f(t+h) - f(t)| < A|h|^a$$

для всех h, $|h| < h_0$ при некоторых положительных A и a;

(3) $f(t)$ растет не быстрее некоторой экспоненты, т.е., $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ для некоторого $M > 0$ и вещественного s_0, называемого показателем роста $f(t)$.

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется функция комплексного переменного p (изображение)

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

Она аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0$. Фраза "функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$" записывается как $f(t) \doteqdot F(p)$ или $F(p) \doteqdot f(t)$.

1. Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$. Выведите следующие свойства преобразования Лапласа:

а) подобие : $f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, $\alpha > 0$.

б) запаздывание оригинала $f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau}F(p)$, $\tau > 0$.

в) смещение изображения $e^{p_0 t}f(t) \doteqdot F(p - p_0)$,

г) дифференцирование оригинала $f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0)$,

д) интегрирование оригинала $\int_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$

е) дифференциирование изображения $F'(p) \doteqdot -tf(t)$

ж) умножение изображений: $F(p)G(p) \doteqdot f(t) * g(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

2. Найдите изображения следующих функций, равных нулю при $t < 0$, а при $t > 0$ определяемых формулами:

а) $f(t) = e^{\lambda t}\cos t$, б) $f(t) = e^{\lambda t}\sin t$;

в) $f(t) = t^n e^{\lambda t}$; г) $f(t) = \dfrac{e^{at} - e^{bt}}{t}$;

д) $f(t) = \dfrac{e^{-at}}{\sqrt{t}}$, е) $f(t) = e^{At}$, где A – матрица.

3. Докажите, что всякая рациональная функция $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$, $\deg P < \deg Q$ является изображением некоторого оригинала и этот оригинал может быть найден по формуле $f(t) = \sum \mathrm{Res}\, \frac{P(p)}{Q(p)}e^{pt}$.

4. Используя преобразование Лапласа, найдите решение следующих задач Коши:

а) $x'' + 2x' + 5x = e^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$,

б) $x'' + 4x' + 13x = e^{-t}$, $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

в) $x'' + x = \varphi(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, где $\varphi(t) = 1$ при $0 < t < 2\pi$, $\varphi(t) = 0$ при $t > 2\pi$

г) $x' + x = \varphi(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, где $\varphi(t) = 1$ при $2n < t < 2n+1$, $\varphi(t) = 0$ при $2n+1 < t < 2n+2$

5. Пусть $F(p)$ - функция, аналитичная в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s$, стремящаяся к нулю при $\mathrm{Re}\, p \to +\infty$, такая, что интеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$$

абсолютно сходится для некоторого $a > s$. Покажите, что функция

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp$$

является оригиналом, изображение которого совпадет с $F(p)$. Описывают ли эти условия все возможные изображени?

6. Пользуясь задачей 2е, вычислите при помощи преобразования Лапласа матричную экспоненту e^{At} для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$; решите задачу Коши $x'(t) = Ax$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. В электрическом контуре с активным сопротивлением R, катушкой индуктивности L с начальным зарядом q (в нулевой момент времени) и конденсатором емкости C включен источник переменного тока, создающий на своем выходе напряжение $E = \cos wt$. Вычислите значение тока, проходящего через активное сопротивление, в момент времени t.