

Тест

1. Найдите сумму $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

2. Вычислите приближенно интеграл $\int_1^{10} dx x^x$.

3. Какую долю от объема $2N$ -мерного куба составляет объем вписанного в него шара?
Указание: рассмотрите интеграл вида

$$\int \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_{2N} e^{-(x_1^2 + \dots + x_{2N}^2)}.$$

4. λ_i — собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислите $\sum_i \lambda_i^2$.

5. $A_{ik} = \delta_{ik} - \alpha u_i u_k$, $i, k = 1, \dots, N$, $\sum_{i=1}^N u_i^2 = 1$. Найдите матрицу, обратную A_{ik} и определите значения параметра α , при которых $\det A$ обращается в нуль.

6. Вычислите интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} (e^{-ax} - e^{bx}), \quad a, b > 0.$$

7. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

8. Найдите асимптотику при $\omega \rightarrow \infty$ фурье-образа $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t)$ функции

$$f(t) = t e^{-|t|}.$$

9. Исследуйте асимптотическое поведение при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ решений дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \frac{\alpha}{x} + \nu^2 \right) = 0.$$

10. Сколькими способами можно раскрасить грани кубика в 6 цветов так, чтобы все его грани были разноцветны?

11. Найдите общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' - (x^{2\alpha} - \alpha x^{\alpha-1})y = 0.$$

12. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y' = x + \frac{x^3}{y}.$$