TfS

(1)

1. i). Наблюдаемая момента импульса определена следующим образом

$$\widehat{M}_x = \widehat{y}\,\widehat{p}_z - \widehat{z}\,\widehat{p}_y,\ \widehat{M}_y = \widehat{z}\,\widehat{p}_x - \widehat{x}\,\widehat{p}_z,\ \widehat{M}_z = \widehat{x}\,\widehat{p}_y - \widehat{y}\,\widehat{p}_x,$$

здесь $\widehat{x}$, $\widehat{y}$, $\widehat{z}$ - наблюдаемые координаты частицы, $\widehat{p}_x$, $\widehat{p}_y$, $\widehat{p}_z$ - наблюдаемые импульса. Используя канонические коммутационные соотношения, показать, что

$$\left[\widehat{M}_x, \widehat{M}_y\right] = \mathrm{i}\hbar\cdot\widehat{M}_z,\ \left[\widehat{M}_z, \widehat{M}_x\right] = \mathrm{i}\hbar\cdot\widehat{M}_y,\ \left[\widehat{M}_y, \widehat{M}_z\right] = \mathrm{i}\hbar\cdot\widehat{M}_x$$

ii), Наблюдаемая квадрата момента определена следующим образом

$$\widehat{M}^2 = \widehat{M}_x^2 + \widehat{M}_y^2 + \widehat{M}_z^2.$$

Показать, что

$$\left[\widehat{M}_x, \widehat{M}^2\right] = \left[\widehat{M}_y, \widehat{M}^2\right] = \left[\widehat{M}_z, \widehat{M}^2\right] = 0.$$

iii). Определим операторы

$$\widehat{M}_+ = \widehat{M}_x + \mathrm{i}\widehat{M}_y,\ \widehat{M}_- = \widehat{M}_x - \mathrm{i}\widehat{M}_y.$$

Показать, что

$$\left[\widehat{M}_+, \widehat{M}_z\right] = -\hbar\cdot\widehat{M}_+,\ \left[\widehat{M}_-, \widehat{M}_z\right] = \hbar\cdot\widehat{M}_-,\ \left[\widehat{M}_+, \widehat{M}_-\right] = 2\hbar\cdot\widehat{M}_z,$$

$$\widehat{M}_+\widehat{M}_- = \widehat{M}^2 - \widehat{M}_z^2 + \hbar\cdot\widehat{M}_z$$

iv). Пусть $|\phi_m\rangle$ - собственное состояние оператора $\widehat{M}_z$ с собственным значением $\hbar\lambda_m$. Показать, что состояние $\widehat{M}_+|\phi_m\rangle$ - тоже собственное состояние оператора $\widehat{M}_z$ с собственным значением $\hbar(\lambda_m + 1)$.

v). Пусть $|\phi_m\rangle$ - собственное состояние оператора $\widehat{M}_z$ с собственным значением $\hbar\lambda_m$. Показать, что состояние $\widehat{M}_-|\phi_m\rangle$ - тоже собственное состояние оператора $\widehat{M}_z$ с собственным значением $\hbar(\lambda_m - 1)$.

vi). Пусть $|\phi_m\rangle$ - собственное состояние оператора $\widehat{M}_z$ с собственным значением $\hbar\lambda_m$. Найти средние значения наблюдаемых $\widehat{M}_x$ и $\widehat{M}_y$ в этом состоянии.

vii). Определим оператор квадрата импульса $\widehat{p}^2 = \widehat{p}_x^2 + \widehat{p}_y^2 + \widehat{p}_z^2$. Найти

$$[\widehat{p}^2, \widehat{M}_z].$$

viii). Определим оператор квадрата координаты $\widehat{R}^2 = \widehat{x}^2 + \widehat{y}^2 + \widehat{z}^2$. Найти

$$[\widehat{R}^2, \widehat{M}_z].$$

2. i). Задана система двух взаимодействующих осцилляторов

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{m\omega^2}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \alpha\cdot x_1 x_2.$$

Найти спектр собственных значений энергии и соответствующие им собственные состояния.

ii). Частица движется вдоль прямой x в потенциале Морса

$$U(x) = U_0\left(e^{-2\alpha\cdot x} - 2e^{-\alpha\cdot x}\right).$$

Найти низколежащие уровни энергии при $\dfrac{\hbar\alpha}{\sqrt{U_0 m}} \ll 1$. Сравнить с точным решением

(Ландафшиц, Кванты, гл.3)

iii).
Частица движется вдоль прямой x в потенциале

$$U(x) = -\frac{U_0}{\mathrm{ch}^2(\alpha\cdot x)}.$$

Найти низколежащие уровни энергии при $\dfrac{\hbar\alpha}{\sqrt{U_0 m}} \ll 1$. Сравнить с точным решением

(Ландафшиц, Кванты, гл.3)

iv). Электрон движется в плоскости в поле неподвижного протона, находящегося на большом расстоянии $l \gg \dfrac{\hbar^2}{m\cdot e^2}$ от плоскости. Найти низколежащие уровни энергии.

v).
Частица движется вдоль прямой x в потенциале

$$U(x) = U_0\left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a}\right)^2, x > 0.$$

Найти низколежащие уровни энергии при $\dfrac{\hbar}{a\sqrt{U_0 m}} \ll 1$.

vi). Два электрона движутся по прямой в поле неподвижного положительного иона заряда Ze, находящегося на большом расстоянии от этой прямой. Исследовать низколежащие уровни энергии этой системы.

3. i). Частица находтся в связанном состоянии в потенциальной яме $-U_0 a\cdot\delta(x)$. К яме медленно придвигают непроницаемую стенку. При каком расстоянии между стенкой и ямой частица уйдет из ямы?

ii). Исследовать энергетический спектр связаных состояний частицы в потенциале

$$U(x) = -\alpha\cdot\delta\left(x - \frac{a}{2}\right) - \alpha\cdot\delta\left(x + \frac{a}{2}\right), \alpha > 0.$$

iii). Частица движется по прямой x между двумя непроницаемыми стенками, расположенными при $x = -a$ и $x = a$, соответственно, в потенциале $U(x) = \alpha\cdot\delta(x)$. Исследовать энергетический спектр.

iv). Частица находится в связанном состоянии в в потенциальной яме $-U_0 a\cdot\delta(x)$. Яма быстро сдвигается на расстояние a. Найти вероятность ухода частицы из ямы.

4. i). Частица движется по прямой x в осцилляторном потенциале

$U(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2$ и находится в основном состоянии. Быстро включается однородное электрическое поле E, направленное вдоль этой прямой. Найти вероятность возбуждения осциллятора.

ii). Гамильтониан частицы, движущейся в плоскости (x, y) в постоянном однородном магнитном поле B, перпендикулярном этой плоскости, имеет вид

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\left(\left(\widehat{p}_x - \frac{e}{c}\widehat{A}_x\right)^2 + \left(\widehat{p}_y - \frac{e}{c}\widehat{A}_y\right)^2\right),$$

здесь $\widehat{A}_x = -\frac{1}{2}B\cdot\hat{y}$, $\widehat{A}_y = \frac{1}{2}B\cdot\hat{x}$. Обосновать!

Введем операторы

$$\widehat{\mathrm{P}} = \widehat{p}_x - \frac{e}{c}\widehat{A}_x, \ \widehat{Q} = \widehat{p}_y - \frac{e}{c}\widehat{A}_y$$

Вычислить коммутатор

$$[\widehat{\mathrm{P}}, \widehat{Q}].$$

Используя этот результат и вид гамильтониана через операторы $\widehat{\mathrm{P}}$, $\widehat{Q}$, найти уровни энергии заряженной частицы в магнитном поле (уровни Ландау).