

Магистратура матфизика

Предварительные задачи

1. Массивная точечная частица движется без трения по поверхности сферы. Написать функцию Лагранжа системы и найти интегралы движения.
2. Найти действие $S(q_0, q_1; t)$ для гармонического осциллятора с лагранжианом $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(m\dot{q}^2 - kq^2)$ при движении по классической траектории от q_0 до q_1 за время t . Удовлетворяет ли ответ уравнению Гамильтона-Якоби?
3. Рассмотрим консервативную динамическую систему с каноническими координатами p_i, q_i , гамильтонианом H и скобкой Пуассона $\{ , \}$. Пусть F и G – два любых интеграла движения, является ли $\{F, G\}$ интегралом движения? Тот же вопрос, если гамильтониан явно зависит от времени?
4. На материальную точку действует сила, проекции которой на координатные оси имеют вид $F_x = 2x + y$, $F_y = x + z^2$, $F_z = 2yz + 1$. Является ли эта сила потенциальной? Если да, найти ее потенциал.
5. Каким распределением зарядов можно создать электрическое поле $\vec{E} = (x, y, z)$? Какими токами можно создать магнитное поле а) $\vec{B} = (y, 0, 0)$, б) $\vec{B} = (x, 0, 0)$?
6. Решить дифференциальное уравнение $xy' + 3y = x^2$.
7. Решить задачу Коши для уравнения $u_t = u_{xxx}$ с начальным условием $u(x, 0) = \cos x$.
8. Найти какое-нибудь решение уравнения $u_t = -uu_x + u_{xxx}$ в виде бегущей волны $u(x, t) = f(x - ct)$.
9. Может ли изолированный свободный электрон а) испустить фотон, б) поглотить фотон?
10. Рассмотрим теорию поля с Лагранжианом $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2)$.
 - Вычислить тензор энергии-импульса и его след. Чем выделен случай $m = 0$?
 - Пусть $m = 0$, а число пространственно-временных измерений равно двум. Какая группа преобразований генерируется этим тензором?
11. Вычислить корреляционную функцию в двумерной евклидовой теории скалярного поля

$$\langle e^{i\alpha_1 \phi(x_1, y_1)} \dots e^{i\alpha_n \phi(x_n, y_n)} \rangle = \int D\phi e^{-\int dx dy \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi} e^{i\alpha_1 \phi(x_1, y_1)} \dots e^{i\alpha_n \phi(x_n, y_n)}$$

12. Для 3-частичной системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + \frac{g^2}{2} \sum_{i < j} \frac{1}{(q_i - q_j)^2}$$

найти все интегралы движения.

13. Написать уравнения гравитационного поля для метрической теории гравитации с лагранжианом $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$, где $g = \det g_{\mu\nu}$, а R - скалярная кривизна пространства-времени. Найти их решения в случае теории в двух измерениях.
14. Нарисовать диаграммы Фейнмана, описывающие эффект Комптона (рассеяние фотона на электроне) в древесном приближении.