

## Листок 2. Бесконечные произведения и немного $q$ -анализа

Анализ, 2 курс, **19.09.2012**

**2♦1** Докажите сходимость следующих бесконечных произведений и вычислите их:

$$\mathbf{a}^0) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{2n+1}}{n^n(n+2)^{n+1}}; \quad \mathbf{б)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n^2 + 3n + 2}\right); \quad \mathbf{в}^0) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{4n-1} \cdot \frac{4n}{4n+1}; \quad \mathbf{г)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right).$$

**2♦2** Исследуйте следующие бесконечные произведения на абсолютную и условную сходимость (всюду ниже  $x \in \mathbb{R}$ ):

$$\mathbf{a}^0) \prod_{n=1}^{\infty} n^{1/n^x}; \quad \mathbf{б)} \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi n^x + 1}{4n^x + 2} \right); \quad \mathbf{в}^0) \prod_{n=1}^{\infty} \cos(\operatorname{arctg} n); \quad \mathbf{г}^0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}};$$

$$\mathbf{д)} \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n + \sin n}{n} \right)$$

**2♦3** Докажите формулу

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

**2♦4** Приведите пример такой последовательности  $(a_n)$ , что

- а)** ряд  $\sum_n a_n^2$  сходится, а произведение  $\prod_n (1 + a_n)$  расходится;  
**б)** ряд  $\sum_n a_n^2$  расходится, а произведение  $\prod_n (1 + a_n)$  сходится.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Зафиксируем число  $q \in \mathbb{R}$  и введем следующие обозначения:

$$[n] = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q\text{-аналог числа } n \in \mathbb{N});$$

$$[n]! = [1][2] \cdot \dots \cdot [n] \quad (q\text{-факториал; } n \in \mathbb{N}); \quad [0]! = 1;$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} \quad (q\text{-биномиальный коэффициент; } k, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad k \leq n);$$

$$(x - a)_q^n = (x - a)(x - aq) \cdot \dots \cdot (x - q^{n-1}a) \quad (q\text{-аналог монома } (x - a)^n; \quad n \in \mathbb{N}, \quad a, x \in \mathbb{R});$$

$$(a; q)_n = (1 - a)_q^n \quad (a \in \mathbb{R}).$$

**2♦5<sup>0</sup>** Докажите, что при  $|q| < 1$  и всех  $a \in \mathbb{R}$  следующее бесконечное произведение сходится:

$$(1 - a)_q^\infty = (a; q)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k).$$

**2♦6 а)** Докажите, что при  $|q| < 1$  и всех  $a \in \mathbb{R}$   $q$ -биномиальный ряд

$$h_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n}{(q; q)_n} z^n \tag{1}$$

сходится при  $|z| < 1$ .

**б)** Подставьте в (1)  $q^a$  вместо  $a$ . К коэффициентам ряда Тейлора какой функции будут стремиться коэффициенты ряда (1) при  $q \rightarrow 1$ ? (Это объясняет смысл термина « $q$ -биномиальный ряд».)

**в)** Докажите, что при  $n \in \mathbb{N}$  функция  $h_{q^{-n}}(z)$  — многочлен, и вычислите  $\lim_{q \rightarrow 1} h_{q^{-n}}(z)$ .

**г)** Докажите тождество  $(1 - z)h_a(z) = (1 - az)h_a(qz) \quad (|z| < 1)$ .

д) Докажите  $q$ -биномиальную теорему Гейне-Коши

$$h_a(z) = \frac{(az; q)_\infty}{(z; q)_\infty} \quad (|z| < 1) \quad (2)$$

и выведите из нее формулу  $h_{q^{-n}}(z) = (q^{-n}z; q)_n$ .

е) Выведите из предыдущего пункта формулу  $q$ -бинома Гаусса

$$(x+a)_q^n = \sum_{k=0}^n q^{k(k-1)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k x^{n-k} \quad (a, x \in \mathbb{R}).$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Функции

$$e_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(q; q)_k}, \quad E_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k-1)/2} \frac{z^k}{(q; q)_k}$$

называются  $q$ -экспонентами. Обратите внимание, что при  $q \rightarrow 1$  имеет место покоеэффициентная сходимость степенных рядов  $e_q((1-q)z) \rightarrow e^z$  и  $E_q((1-q)z) \rightarrow e^z$ .

**2♦7** Докажите, что при  $|z| < 1$  имеют место равенства

$$e_q(z) = \frac{1}{(z; q)_\infty}, \quad E_q(z) = (-z, q)_\infty. \quad (3)$$

*Указание.* Для доказательства второго равенства замените  $z$  на  $-z/a$  в (2), затем устремите  $a$  к  $\infty$  и, наконец, обоснуйте возможность переставлять символы  $\lim_{a \rightarrow \infty}$  и  $\sum_{k=0}^{\infty}$  в данном случае.

**2♦8\*** (необязательная задача; решившие ее получают бонусные баллы).

а) Докажите тождество Якоби

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}z)(1 + q^{2n-1}z^{-1}).$$

*Указание.* Замените в тождестве (3) для  $E_q(z)$   $q$  на  $q^2$  и  $z$  на  $qz$ , а затем домножьте полученное выражение на  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$ . Возникшее при этом «лишнее» бесконечное произведение преобразуйте с помощью формулы (3) для  $E_q(z)$ . Наконец, воспользуйтесь формулой (3) для  $e_q(z)$ .

б) Из тождества Якоби выведите формулу произведения Эйлера

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

Правая часть этой формулы тесно связана с разбиениями — см. листок по алгебре.