Нормированные пространства (продолжение) — сепарабельность, полнота

Разбирались задачи ДЗ.2.1-ДЗ.2.4 из домашнего задания. Ответы:

ДЗ.2.2. Если $p \leqslant q$, то $\|\cdot\|_p \leqslant C\|\cdot\|_q$ на $C[a,b]$, и наименьшая такая константа C равна $(b-a)^{1/p-1/q}$.

ДЗ.2.2. c_{00} не полно ни по одной из норм $\|\cdot\|_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$; $C[a,b]$ полно по норме $\|\cdot\|_\infty$ и неполно по норме $\|\cdot\|_p$ при $p < \infty$.

ДЗ.2.2. ℓ^∞ несепарабельно, $C[a,b]$ сепарабельно по норме $\|\cdot\|_p$ для всех $p \in [1,+\infty]$.

Домашнее задание

Пусть (X,μ) — пространство с мерой и $p \in [1,+\infty)$. Через $L^p(X,\mu)$ обозначается множество классов μ-эквивалентности измеримых функций $f\colon X \to \mathbb{C}$, таких, что функция $|f|^p$ интегрируема. Оно является нормированным пространством относительно нормы

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

То, что $\|\cdot\|_p$ — норма, доказывается дословно так же, как и для пространства $C[a,b]$ (см. задачу ДЗ.1.3).

ДЗ 3.1. Модифицируйте доказательство полноты пространства $L^1(X,\mu)$ (см. лекцию) и покажите, что $L^p(X,\mu)$ полно для любого $p \in [1,+\infty)$.

В дальнейшем для измеримого подмножества $A \subseteq X$ символом χ_A будет обозначаться его характеристическая функция (индикатор), равная 1 на A и 0 вне A.

ДЗ 3.2. Пусть $p \in [1,+\infty)$. Докажите, что
1) для любого пространства с мерой (X,μ) пространство *простых функций*

$$\operatorname{span}\{\chi_A : A \subseteq X \text{ измеримо}, \ \mu(A) < \infty\}$$

плотно в $L^p(X,\mu)$;
2) пространство *ступенчатых функций*

$$\operatorname{span}\{\chi_I : I \subseteq [a,b] \text{ — промежуток}\}$$

плотно в $L^p[a,b]$;
3) $C[a,b]$ плотно в $L^p[a,b]$;
4) $L^p[a,b]$ и $L^p(\mathbb{R})$ сепарабельны.

ДЗ 3.3. Пусть (X,μ) — пространство с мерой.
1) Докажите, что если $\mu(X) < \infty$, то $L^q(X,\mu) \subseteq L^p(X,\mu)$ при $p \leqslant q$. Докажите, что вложение $L^q(X,\mu)$ в $L^p(X,\mu)$ непрерывно, и вычислите его норму.
2) Справедлив ли результат предыдущей задачи в случае, когда $\mu(X) = \infty$?

В связи с результатом задачи ДЗ.2.2 естественно поинтересоваться, существует ли на пространстве c_{00} хоть какая-нибудь норма, относительно которой оно было бы полным. Ответ отрицателен:

ДЗ 3.4. Докажите, что нормированное пространство счетной размерности не может быть полным.

Из задачи ДЗ.2.1 напрашивается вывод, что с точки зрения функционального анализа конечномерные нормированные пространства так же просты, как и с точки зрения линейной алгебры. Это, однако, не совсем так: все зависит от того, какие нормированные пространства мы договоримся считать «одинаковыми» (или, точнее, от того, как мы определим морфизмы категории нормированных пространств).

Определение 3.1. Линейное отображение $T\colon X \to Y$ между нормированными пространствами X и Y называется *топологическим изоморфизмом*, если оно — гомеоморфизм, и *изометрическим изоморфизмом*, если оно биективно и $\|Tx\| = \|x\|$ для всех $x \in X$.

Очевидно, всякий изометрический изоморфизм является топологическим изоморфизмом, однако обратное неверно. Из задачи ДЗ.2.1 следует, что любые два конечномерных нормированных пространства одинаковой размерности топологически изоморфны.

Определение 3.2. Пусть X, Y — конечномерные нормированные пространства одинаковой размерности. *Расстоянием Банаха-Мазура* между ними называется величина

$$d(X,Y) = \inf\bigl\{\|T\|\|T^{-1}\| \;:\; T\colon X \to Y \text{ — линейный изоморфизм}\bigr\}.$$

ДЗ 3.5. Обозначим через K_n множество классов изометрического изоморфизма n-мерных нормированных пространств.

1) Докажите, что функция $\rho(X,Y) = \log d(X,Y)$ — метрика на K_n.
2*) Докажите, что метрическое пространство (K_n, ρ) компактно (оно называется *компактом Банаха-Мазура*).
3) Положим $\ell_n^p = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$. Вычислите $d(\ell_n^p, \ell_n^2)$.
4) Вычислите $d(\ell_n^p, \ell_n^q)$ в предположении, что $1 \leqslant p, q \leqslant 2$ или $2 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

Таким образом, с метрической точки зрения конечномерные нормированные пространства — это не такая уж тривиальная вещь. На их использовании основана так называемая *локальная теория* банаховых пространств — наука, изучающая бесконечномерные банаховы пространства с точки зрения геометрии их конечномерных подпространств.