

Л.Г. Рыбников: Темы курсовых работ 2012 года

Задачи, сформулированные в каждой из тем, предлагается решить (или, по крайней мере, начать решать) самостоятельно – это повод для дальнейшего обсуждения и развития темы.

Для 1 КУРСА БАКАЛАВРИАТА

(1) **Почти коммутирующие матрицы.**

Задача: Пусть A и B – комплексные матрицы $n \times n$. Доказать, что если $\text{rk}(AB - BA) = 1$, то матрицы A и B приводятся к верхнетреугольному виду в одном и том же базисе.

(2) **Результант.**

Задача: Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены степеней n и k соответственно. Написать многочлен от коэффициентов $P(x)$ и $Q(x)$, обращающийся в нуль тогда и только тогда, когда многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют нетривиальный общий делитель.

Для 1-2 КУРСОВ БАКАЛАВРИАТА

(1) **Пфаффиан.**

Задача: Доказать, что определитель кососимметрической матрицы является квадратом некоторого многочлена от ее коэффициентов. Найти явную формулу для этого многочлена.

(2) **Теорема Амицура–Левицкого.**

Задача: Пусть A_1, A_2, \dots, A_{2n} – матрицы $n \times n$. Тогда

$$\sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \dots A_{\sigma(2n)} = 0,$$

где $(-1)^\sigma$ означает знак перестановки σ .

(3) **Классификация троек подпространств в \mathbb{R}^n .**

Задача: классифицировать тройки линейных подпространств в \mathbb{R}^n с точностью до линейного изоморфизма.

Для 2-3 КУРСОВ БАКАЛАВРИАТА

(1) **Коприсоединенное представление.**

Пусть \mathfrak{g}^* – коприсоединенное (двойственное к присоединенному) представление конечномерной комплексной алгебры Ли \mathfrak{g} . *Аннулятором* элемента $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ называется подалгебра Ли $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}^*(x)\alpha = 0\}$.

Задача: (Теорема Дюфло об аннуляторе) Доказать, что алгебра Ли \mathfrak{g}_α абелева для всех α , лежащих в некотором открытом плотном подмножестве в \mathfrak{g}^* .

(2) **Теория Морса на унитарной группе.**

Задача: Пусть A – эрмитова матрица $n \times n$ с различными собственными значениями. Рассмотрим функцию $f_A(X) := \text{Re Tr } AX$ на группе Ли U_n . Найти все критические точки этой функции, индексы этих точек, вычислить когомологии многообразия U_n .

(3) **Дифференциальные операторы на проективной прямой.**

Задача: Найти все голоморфные (регулярные алгебраические) дифференциальные операторы на $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Доказать, что алгебра голоморфных дифференциальных операторов на $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ порождается векторными полями. Задать эту алгебру образующими и соотношениями.

(4) **Спинорная группа.**

Задача: Доказать, что фундаментальная группа группы Ли $SO(n, \mathbb{R})$ при $n \geq 3$ есть $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Задать явно какое-нибудь точное представление универсальной накрывающей этой группы Ли.

(5) **Группа Ли G_2 .**

Алгебра октав \mathbb{O} – неассоциативная вещественная алгебра, состоящая из пар кватернионов (a, b) с умножением $(a, b)(c, d) = (ac - d\bar{b}, \bar{a}d + cb)$ (где черта обозначает сопряжение в кватернионах: $\overline{(x + iy + jz + kt)} = x - iy - jz - kt$).

Задача: Доказать, что группа автоморфизмов алгебры \mathbb{O} является связной компактной группой Ли, и найти ее систему корней.

(6) **Двойственность Хау.**

Задача: Группа $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(m, \mathbb{C})$ действует в пространстве $U := \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$. Разложить в прямую сумму неприводимых представлений группы $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(m, \mathbb{C})$ представления $S^k U$ и $\Lambda^k U$.