Задачи по курсу «**ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП**».

1. Пусть **C** - **алгебра Клиффорда** (простейший случай), а именно, алгебра с **n** образующими, которые попарно антикоммутируют, а квадрат каждой образующей – единица. Покажите, что если **n** чётно, то **C** – матричная алгебра, а если **n** нечётно, то **C** – прямая сумма двух матричных алгебр. Мы предполагаем, что алгебра **C** определена над полем комплексных чисел. Что будет, если поле комплексных чисел заменить на поле вещественных чисел?
2. Пусть **G** – группы **Гейзенберга**, то есть группа с тремя образующими **X, Y, K**, причём **K** – центральный элемент: **KX=XK, KY=YK, XY=KYX, X^n=Y^n=K^n=1, n** – натуральное число. Найдите все неприводимые представления группы **G** (укажите их размерности и явный вид).
3. Найдите группу автоморфизмов группы **G** из предыдущей задачи.
4. Группа автоморфизмов любой группы действует на множестве её неприводимых представлений. Определите действие автоморфизмов группы **Гейзенберга** на множестве её неприводимых представлений. Для простоты будем считать, что **n** – простое число. Когда разберётесь с этим случаем, можно попробовать общее **n**. Это относится и к задаче №3.
5. Рассмотрим теперь группу **Гейзенберга** с образующими **X,Y,Z,T,K.** Все пять образующих в степени **n** равны единице, **K** – центральный элемент, **XY=KYX, ZT=KTZ,** все прочие пары элементов коммутируют. Найдите у этой группы все неприводимые представления. Тут тоже разумно себя ограничить сначала случаем, когда **n** – простое число. Сделайте аналоги задач №3 и №4.
6. Пусть **F** – конечное поле из **q** элементов. Обозначим через **Gr(n,k)** – множество **k**-мерных подпространств в **n**-мерном пространстве, **Gl(n)** – полную линейную группу преобразований **n**- мерного пространства. Ясно, что группа **Gl(n)** действует на множестве **Gr(n,k)**, а потому пространство функций на **Gr(n,k)** – представление группы **Gl(n)**. Разложить это представление на неприводимые. Основное поле при этом предполагается полем комплексных чисел. Определите алгебру эндоморфизмов этого представления. (Напомним, что базис в алгебре эндоморфизмов нумеруется орбитами действия группы **Gl(n)** в произведении **Gr(n,k)** x **Gr(n,k).** От вас требуется написать умножение в алгебре эндоморфизмов в этом базисе.)

*7. Предположим, что в предыдущей задаче основное поле имеет характеристику **p, q** – степень **p.** Группа теперь действует в пространстве функции со значениями в этом поле. Попытайтесь разложить это представление. Заметим, что теорема о полной приводимости теперь неверна, а потому представление разложится не в сумму неприводимых, а в сумму неразложимых. Каждое неразложимое подпредставление имеет, возможно, много композиционных факторов. Задача состоит в том, чтобы явно указать неразложимые компоненты и у каждой компоненты найти её ряд **Жордана-Гёльдера**. Чтобы было ясно, что происходит, разберитесь сначала с простейшим случаем **n**=2, **k**=1, то есть, когда **Gr(n,k) –** проективная прямая.