Гауссовы интегралы

1 Конечномерный случай

- Начнем с интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \tag{1.1}$$

Указание: вычислить квадрат интеграла $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} dxdy e^{-(x^2+y^2)}$.

- С помощью замены переменной вычисляем

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tag{1.2}$$

- Тривиально многомерное обобщение

$$I(a_1, \ldots, a_n) = \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 \ldots dx_n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i x_i^2} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod_{i=1}^n a_i} \tag{1.3}$$

с помощью которого легко понять формулу

$$I(A) = \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 \ldots dx_n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \tag{1.4}$$

В последнем случае существенно, что матрицу A можно считать симметричной $A_{ij} = A_{ji}$, и диагонализовать ортогональным преобразованием.

Замечания:

1. Диагонализация симметричной матрицы или приведение квадратичной формы к диагональному виду (линейная алгебра)

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j \to \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}_i^2 \\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = d\tilde{x}_1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}_n \end{gathered} \tag{1.5}$$

2. Отрицательные $a_j < 0$ для некоторых $1 \leq j \leq n$ - выбор другого контура интегрирования. Что делать если $a_j = 0$?

Вычислим теперь

$$I(a|b) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2+bx} = e^{b^2/2a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tag{1.6}$$

и его очевидное обобщение

$$\begin{aligned} I(A|\mathbf{b}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j+\sum_i b_ix_i} = \\ = e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_iA^{-1}_{ij}b_j}\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Замечания:

1. Пусть квадратичное "действие" $S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j - \sum_i b_ix_i$. Найдем условие его экстремума

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = \sum_j A_{kj}x_j - b_k = 0, \qquad k = 1, \dots, n \tag{1.8}$$

с решением $X_i = \sum_j A^{-1}_{ij} b_j$. На решении $S(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_iA^{-1}_{ij}b_j$, т.е.

$$\frac{I(A|\mathbf{b})}{I(A|0)} = \exp(-\left. S(\mathbf{x})\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}}) \tag{1.9}$$

где правая часть определяется минимальным значением действия - основным вкладом в интеграл.

2. Легко определить (и вычислить!) "корреляторы"

$$\begin{aligned} \langle x_{i_1}\dots x_{i_k}\rangle = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\; x_{i_1}\dots x_{i_k} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j}}{\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j}} = \\ = \frac{\partial^k}{\partial b_{i_1}\dots\partial b_{i_k}}\left.\frac{I(A|\mathbf{b})}{I(A|0)}\right|_{\mathbf{b}=0} = \frac{\partial^k}{\partial b_{i_1}\dots\partial b_{i_k}}\left. e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_iA^{-1}_{ij}b_j}\right|_{\mathbf{b}=0} \end{aligned} \tag{1.10}$$

например

$$\langle x_j \rangle = 0, \quad \forall 1 \le j \le n$$
$$\langle x_j x_k \rangle = A^{-1}_{jk} \tag{1.11}$$
$$\dots$$

Из правой части (1.10) видно, что любые корреляторы в гауссовой модели выражаются через парные.

Матричные модели: гауссов матричный интеграл

Уже не вполне тривиальным случаем является теория матричного "поля" $\Phi = \|\Phi_{ij}\|$, принимающего значения, например, в эрмитовых матрицах - и с полиномиальным потенциалом

$$V(\Phi) = \mathrm{Tr}W(\Phi) = \mathrm{Tr}\sum t_k \Phi^k \tag{1.12}$$

Статсумма такой теории

$$Z(t) = \int d\Phi \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\mathrm{Tr}W(\Phi)\right) \tag{1.13}$$

полезно интерпретировать и как модель многомерной матричной квантовой теории поля (теории полей Янга-Миллса), и как полезный для изучения модельный статистический ансамбль.

Для потенциала $W(\Phi) = \frac{1}{2}\Phi^2 - t\Phi$ интеграл (1.13) модет быть вычислен немедленно:

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{gauss}}(t,N) = \int \mathrm{d}\Phi e^{-\frac{1}{\hbar}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\Phi^2 - t\Phi\right)} \underset{\Phi\to t+\Phi}{=} e^{-\frac{Nt^2}{2\hbar}} \int \mathrm{d}\Phi e^{-\frac{1}{2\hbar}\mathrm{Tr}\Phi^2} = \\ = e^{-\frac{Nt^2}{2\hbar}} (2\pi\hbar)^{\frac{N^2}{2}} \end{aligned} \tag{1.14}$$

2 Квантовая механика

Рассмотрим "бесконечномерное" обобщение - интеграл по траекториям в евклидовой квантовой механике

$$I(T) = \int DX e^{-\int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2T}} \tag{2.15}$$

который можно понимать следующим образом. Пусть для определенности $X(t)$ определена на отрезке $t \in [0,1]$ с нулевыми граничными условиями $X(0) = 0$ и $X(1) = 0$. В пространстве таких функций можно выбрать естественный базис, и любую функцию представить как

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin(\pi k t), \quad \dot{X}(t) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k x_k \cos(\pi k t) \tag{2.16}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S[X] = \int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2T} = \frac{\pi^2}{2T} \sum_{k,l=1}^{\infty} k x_k l x_l \int_0^1 dt \cos(\pi k t) \cos(\pi l t) = \\ = \frac{\pi^2}{4T} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

а меру интегрирования было бы естественно определить как $DX = N \prod_{k=1}^{\infty} dx_k$, где N - некоторая "нормировочная" постоянная.

Результат интегрирования в (2.15) теперь легко формально записать в виде

$$\begin{aligned} I(T) = N \int \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \exp\left(-\frac{\pi^2}{4T} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2 \right) = \\ = N \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{a_k}} \bigg|_{a_k = \frac{\pi^2 k^2}{2T}} = N \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4T}{\pi k^2}} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Разумность интерпретации этого ответа зависит, конечно, от нормировочной константы N.

Заметим, например, что при переопределении $t = \tau / T$ действие (2.17) можно переписать как

$$S[X] = \int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2T} = \tfrac{1}{2} \int_0^T d\tau \left(\frac{dX}{d\tau} \right)^2 \tag{2.19}$$

т.е. величину T можно считать некоторой естественной "длиной траектории". При этом константу N можно зафиксировать, например, потребовав

$$\begin{aligned}\int DX e^{-\frac{1}{2}\|X\|^2} = \int DX e^{-\frac{1}{2}\int_0^T d\tau X^2} = \\ = N\int \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \exp\left(-\frac{T}{4}\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right) = 1\end{aligned} \tag{2.20}$$

что с очевидностью даёт $N = \prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{T}{4\pi}}$. Тогда

$$I(T) = N\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{4T}{\pi k^2}} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{T}{\pi k} \tag{2.21}$$

Чему равно бесконечное произведение в правой части? Предлагается странный рецепт: после логарифмирования

$$\log I(T) = \sum_{k=1}^{\infty}\log T - \sum_{k=1}^{\infty}\log(\pi k) \tag{2.22}$$

бесконечную константу - вообще "забыть", а коэффициент перед $\log T$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\bigg|_{s=0} = \zeta(0) = -\tfrac{1}{2} \tag{2.23}$$

вычислить, например, с помощью аналитического продолжения ζ-функции (лекции О.Шварцмана за 09/10 год). Таким образом,

$$I(T) = \int_{X(0)=0}^{X(1)=0} DX e^{-\int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2T}} = \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{T}} \tag{2.24}$$

а переопределив нормировку N константу можно считать равной единице.

Обобщения:

- В случае многих переменных $X_\mu = X_\mu(t)$, $\mu = 1, \ldots, d$ - для d-мерной релятивистской механики

$$I(T) = \int_{X_\mu(0)=0}^{X_\mu(1)=0} DX e^{-\int_0^1 dt \frac{\dot{X}_\mu^2}{2T}} = \frac{1}{T^{d/2}} \tag{2.25}$$

- Для ненулевых граничных условий

$$I(T|X_1, X_0) = \int_{X(0)=X_0}^{X(1)=X_1} DX e^{-\int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2T}} = \frac{e^{\frac{(X_1-X_0)^2}{2T}}}{T^{d/2}} \tag{2.26}$$

Очевидно, что последнее выражение удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial T} I(T|X, X_0) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial X_\mu^2} I(T|X, X_0) \tag{2.27}$$

с граничным условием

$$I(T|X, X_0) \underset{T\to 0}{\to} \delta^{(d)}(X - X_0) \tag{2.28}$$

т.е. является ядром d-мерного уравнения теплопроводности.

Другими словами - выражение (2.26) можно считать амплитудой перехода свободной частицы в d-мерной евклидовой квантовой механике из точки X_0 в X_1 за время T, или

$$\begin{gathered} I(T|X_1, X_0) = \langle X_1 | \exp(-T\hat{H}) | X_0 \rangle \\ \hat{H} = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial X_\mu^2} \end{gathered} \tag{2.29}$$

а уравнение (2.27) интерпретировать как уравнение Шредингера после аналитического продолжения. Оправданность выбранной регуляризации связана именно с тем, что она приводит к физически осмысленному результату.