

# ПУЧКИ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

## ЛИСТОК 2: ЯДРА И КОЯДРА

Осень 2012 года

Всюду в этом листке под “предпучками” и “пучками” подразумеваются предпучки и пучки абелевых групп. Напомним, что предпучок на пространстве  $X$  называется пучком, если он удовлетворяет двум условиям: единственности (сечения над открытым множеством  $U$  с заданными ограничениями на открытые множества  $U_\alpha$ , образующие покрытие  $U$ ) и существования (сечения над  $U$  с такими заданными ограничениями на  $U_\alpha$ , согласованными на пересечениях  $U_\alpha \cap U_\beta$ ). Будем называть предпучок  $\mathcal{F}$  *отделимым*, если он удовлетворяет первому из этих двух условий (единственности).

Понятия *подпредпучка* и *факторпредпучка*, свойства *инъективности* и *сюръективности* гомоморфизмов предпучков, конструкции *ядра*, *образа* и *коядра* гомоморфизма предпучков определяются путем применения соответствующих понятий и конструкций для абелевых групп к группам сечений предпучков на каждом открытом множестве. Например, подпредпучок  $\mathcal{G}$  предпучка  $\mathcal{F}$  — это совокупность подгрупп  $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ , заданных для всех открытых множеств  $U \subset X$  так, что для любых вложенных открытых множеств  $V \subset U$  отображение ограничения  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  отображает  $\mathcal{G}(U)$  в  $\mathcal{G}(V)$ . Факторпредпучок предпучка  $\mathcal{F}$  по его подпредпучку  $\mathcal{G}$  сопоставляет открытому множеству  $U$  факторгруппу  $\mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ , и т.д.

*Подпучком* пучка называется его подпредпучок, являющийся пучком. Гомоморфизм пучков называется *инъективным*, если он инъективен как гомоморфизм предпучков.

**Задача 1.** Докажите следующие утверждения:

- всякий подпредпучок отделимого предпучка отделим; в частности, всякий подпредпучок пучка является отделимым предпучком;
- факторпредпучок пучка по его подпучку является отделимым предпучком;
- ядро гомоморфизма из пучка  $\mathcal{F}$  в отделимый предпучок  $\mathcal{G}$  является подпучком в  $\mathcal{F}$ .

**Задача 2.** Приведите контрпримеры, показывающие, что

- факторпредпучок пучка по его подпучку может не быть пучком;
- коядро гомоморфизма пучков может не быть отделимым предпучком.

Пусть  $\mathcal{F}^+$  обозначает пучок, ассоциированный с предпучком  $\mathcal{F}$  (на жаргоне, пучок  $\mathcal{F}^+$  называется *пучковизацией* предпучка  $\mathcal{F}$ ).

**Задача 3.** Докажите следующие утверждения:

а) для любого предпучка  $\mathcal{F}$ , естественный гомоморфизм предпучков  $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$  индуцирует изоморфизмы слоев  $\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{F}_x^+$  во всех точках  $x \in X$ ;

б) гомоморфизм отделимых предпучков  $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$  инъективен тогда и только тогда, когда индуцированный морфизм слоев  $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$  инъективен для всех точек  $x \in X$ ;

в) предпучок  $\mathcal{F}$  отделим тогда и только тогда, когда естественный гомоморфизм предпучков  $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$  инъективен;

г) гомоморфизм пучков  $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$  является изоморфизмом тогда и только тогда, когда индуцированный морфизм слоев  $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$  является изоморфизмом для всех точек  $x \in X$ .

Пусть  $\mathcal{G}$  — подпучок пучка  $\mathcal{F}$ . *Факторпучком*  $\mathcal{F}/\mathcal{G}$  называется пучковизация факторпредпучка  $\mathcal{F}$  по  $\mathcal{G}$ .

**Задача 4.** а) Покажите, что для любого открытого множества  $U \subset X$  последовательность абелевых групп

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{G})(U)$$

точна. (В такой ситуации говорят, что функтор, сопоставляющий пучку  $\mathcal{F}$  группу его сечений  $\mathcal{F}(U)$ , *точен слева*.)

б) Покажите, что для любой точки  $x \in X$  последовательность абелевых групп

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{G})_x \longrightarrow 0$$

точна. (В такой ситуации говорят, что функтор, сопоставляющий пучку  $\mathcal{F}$  его слой  $\mathcal{F}_x$ , *точен*.)

Пусть  $f: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$  — гомоморфизм пучков. *Ядром* гомоморфизма  $f$  называется его ядро как гомоморфизма предпучков. *Образом* гомоморфизма  $f$  называется пучковизация его образа как гомоморфизма предпучков. *Коядром* гомоморфизма  $f$  называется пучковизация его коядра как гомоморфизма предпучков.

**Задача 5.** Покажите, что

а) ядро гомоморфизма  $f$  является подпучком пучка  $\mathcal{F}$ ;

б) образ гомоморфизма  $f$  является факторпучком пучка  $\mathcal{F}$  по ядру гомоморфизма  $f$ ;

в) образ гомоморфизма  $f$  является подпучком пучка  $\mathcal{G}$ ;

г) коядро гомоморфизма  $f$  является факторпучком пучка  $\mathcal{G}$  по образу гомоморфизма  $f$ .

**Задача 6.** Покажите, что следующие условия эквивалентны (гомоморфизм пучков  $f$  называется *сюръективным*, если выполнено любое из них):

а) образ гомоморфизма  $f$ , рассматриваемый как подпучок в  $\mathcal{G}$ , совпадает со всем пучком  $\mathcal{G}$ ;

б) коядро гомоморфизма  $f$  является нулевым пучком;

в) индуцированный гомоморфизм слоев  $f_x: \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$  сюръективен для всех точек  $x \in X$ .