

ПУЧКИ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

ЛИСТОК 2: ЯДРА И КОЯДРА

Осень 2012 года

Всюду в этом листке под “предпучками” и “пучками” подразумеваются предпучки и пучки абелевых групп. Напомним, что предпучок на пространстве X называется пучком, если он удовлетворяет двум условиям: единственности (сечения над открытым множеством U с заданными ограничениями на открытые множества U_α , образующие покрытие U) и существования (сечения над U с такими заданными ограничениями на U_α , согласованными на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$). Будем называть предпучок \mathcal{F} *отделимым*, если он удовлетворяет первому из этих двух условий (единственности).

Понятия *подпредпучка* и *факторпредпучка*, свойства *инъективности* и *сюръективности* гомоморфизмов предпучков, конструкции *ядра*, *образа* и *коядра* гомоморфизма предпучков определяются путем применения соответствующих понятий и конструкций для абелевых групп к группам сечений предпучков на каждом открытом множестве. Например, подпредпучок \mathcal{G} предпучка \mathcal{F} — это совокупность подгрупп $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$, заданных для всех открытых множеств $U \subset X$ так, что для любых вложенных открытых множеств $V \subset U$ отображение ограничения $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ отображает $\mathcal{G}(U)$ в $\mathcal{G}(V)$. Факторпредпучок предпучка \mathcal{F} по его подпредпучку \mathcal{G} сопоставляет открытому множеству U факторгруппу $\mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$, и т.д.

Подпучком пучка называется его подпредпучок, являющийся пучком. Гомоморфизм пучков называется *инъективным*, если он инъективен как гомоморфизм предпучков.

Задача 1. Докажите следующие утверждения:

- всякий подпредпучок отделимого предпучка отделим; в частности, всякий подпредпучок пучка является отделимым предпучком;
- факторпредпучок пучка по его подпучку является отделимым предпучком;
- ядро гомоморфизма из пучка \mathcal{F} в отделимый предпучок \mathcal{G} является подпучком в \mathcal{F} .

Задача 2. Приведите контрпримеры, показывающие, что

- факторпредпучок пучка по его подпучку может не быть пучком;
- коядро гомоморфизма пучков может не быть отделимым предпучком.

Пусть \mathcal{F}^+ обозначает пучок, ассоциированный с предпучком \mathcal{F} (на жаргоне, пучок \mathcal{F}^+ называется *пучковизацией* предпучка \mathcal{F}).

Задача 3. Докажите следующие утверждения:

а) для любого предпучка \mathcal{F} , естественный гомоморфизм предпучков $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ индуцирует изоморфизмы слоев $\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{F}_x^+$ во всех точках $x \in X$;

б) гомоморфизм отделимых предпучков $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ инъективен тогда и только тогда, когда индуцированный морфизм слоев $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ инъективен для всех точек $x \in X$;

в) предпучок \mathcal{F} отделим тогда и только тогда, когда естественный гомоморфизм предпучков $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ инъективен;

г) гомоморфизм пучков $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда индуцированный морфизм слоев $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ является изоморфизмом для всех точек $x \in X$.

Пусть \mathcal{G} — подпучок пучка \mathcal{F} . *Факторпучком* \mathcal{F}/\mathcal{G} называется пучковизация факторпредпучка \mathcal{F} по \mathcal{G} .

Задача 4. а) Покажите, что для любого открытого множества $U \subset X$ последовательность абелевых групп

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{G})(U)$$

точна. (В такой ситуации говорят, что функтор, сопоставляющий пучку \mathcal{F} группу его сечений $\mathcal{F}(U)$, *точен слева*.)

б) Покажите, что для любой точки $x \in X$ последовательность абелевых групп

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{G})_x \longrightarrow 0$$

точна. (В такой ситуации говорят, что функтор, сопоставляющий пучку \mathcal{F} его слой \mathcal{F}_x , *точен*.)

Пусть $f: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ — гомоморфизм пучков. *Ядром* гомоморфизма f называется его ядро как гомоморфизма предпучков. *Образом* гомоморфизма f называется пучковизация его образа как гомоморфизма предпучков. *Коядром* гомоморфизма f называется пучковизация его коядра как гомоморфизма предпучков.

Задача 5. Покажите, что

а) ядро гомоморфизма f является подпучком пучка \mathcal{F} ;

б) образ гомоморфизма f является факторпучком пучка \mathcal{F} по ядру гомоморфизма f ;

в) образ гомоморфизма f является подпучком пучка \mathcal{G} ;

г) коядро гомоморфизма f является факторпучком пучка \mathcal{G} по образу гомоморфизма f .

Задача 6. Покажите, что следующие условия эквивалентны (гомоморфизм пучков f называется *сюръективным*, если выполнено любое из них):

а) образ гомоморфизма f , рассматриваемый как подпучок в \mathcal{G} , совпадает со всем пучком \mathcal{G} ;

б) коядро гомоморфизма f является нулевым пучком;

в) индуцированный гомоморфизм слоев $f_x: \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ сюръективен для всех точек $x \in X$.