Листок 3. ИЗОПы и НИЗОПы[1]

Анализ, 2 курс, **26.09.2012**

3◇1 Вычислите пределы: **а$^{\circ}$)** $\lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_1^2 \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)}\,dx$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\pi/2} e^{-n\sin x}\,dx$.

3◇2° (*Формула для n-й первообразной*). Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Положим

$$F(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt.$$

Докажите, что $F^{(n)}(x)=f(x)$ на $[a,b]$.

3◇3 Вычислите интегралы: **а$^{\circ}$)** $\int\limits_0^{\pi/2}\ln(a^2-\sin^2\varphi)\,d\varphi \quad (|a|>1)$; **б$^{\circ}$)** $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\,dx \quad (0<b<a)$.

3◇4 Пусть

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2}e^{-y^2/x} & \text{при } x>0;\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Убедитесь, что равенство

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 f(x,y)\,dx=\int_0^1 f'_y(x,y)\,dy$$

выполнено не для всех $y\in[0,1]$. Какие условия теоремы о дифференцировании интеграла по параметру здесь нарушаются?

3◇5 Пусть Y — топологическое пространство (скажем, подмножество $\mathbb{R}$), $Y_0\subset Y$ — плотное подмножество, $f\colon[a,+\infty)\times Y\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция. Предположим, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на Y_0. Докажите, что он равномерно сходится на Y.

3◇6 Исследуйте следующие несобственные интегралы на равномерную сходимость на указанных множествах: **а$^{\circ}$)** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+(x-\alpha)^4}$ на $(-\infty,a]$; **б$^{\circ}$)** он же на $[0,\infty)$; **в)** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\alpha\,dx}{1+\alpha^2x^2}$ на $[0,1]$;

г) он же на $[1,+\infty)$; **д$^{\circ}$)** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x}}\,dx$ на $[\delta,+\infty)$ (где $\delta>0$); **е$^{\circ}$)** он же на $(0,+\infty)$;

ж) $\int\limits_1^{+\infty}\cos(\alpha x^3)\,dx$ на $[1,+\infty)$.

3◇7 Предположим, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по $y\in Y$ и сходится абсолютно для каждого $y\in Y$. Следует ли отсюда, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}|f(x,y)|\,dx$ сходится равномерно по $y\in Y$?

[1] ИЗОП — интеграл, зависящий от параметра; НИЗОП — несобственный интеграл, зависящий от параметра.