Алгебра. 1 курс. Листок 2.

Задачи этого листка можно сдавать как по пунктам (в любом порядке), так и блоками. Если Вы заявляете, что можете решить все пункты какой-то задачи, то преподаватель может зачесть Вам эту задачу, попросив рассказать выборочно (по своему усмотрению) только некоторые пункты.

◇ **2.1.** *Придумайте операцию, обладающую нейтральным элементом а) ассоциативную, но не коммутативную; б) коммутативную, но не ассоциативную.*

◇ **2.2.** *Докажите, что для любой бинарной операции имеется не более одного нейтрального элемента.*

◇ **2.3.** *Докажите, что если операция "$*$" ассоциативна, то все различные способы задания порядка выполнения действий (при помощи расстановки $n-2$ пар скобок) в произведении $a_1 * a_2 * \ldots a_n$, дают один и тот же результат.(Менять порядок сомножителей нельзя!)*

◇ **2.4.** *Существует ли нейтральный элемент для следующих операций на множествах:*
а) Операция композиции на множестве отображений множества X в себя;
б) Операция $\max(a, b)$ на множестве неотрицательных действительных чисел $[0; +\infty)$;
в) Операция $\max(a, b)$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$;
г) Операция $\text{НОД}(a, b)$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$;
д) Операция $\text{НОК}(a, b)$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$;
е) Операция умножения на множестве всех периодических функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, имеющих период 2π;
ж) Операция объединения множеств на множестве всех подмножеств данного множества Ω;
з) Операция пересечения множеств на множестве всех подмножеств данного множества Ω;
и) Операция симметрической разности множеств ($A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$) на множестве всех подмножеств данного множества Ω.

◇ **2.5.** *Докажите, что в группе с операцией "$\cdot$" каждое из уравнений $a \cdot x = b$ и $y \cdot a = b$ имеет единственное решение при любых a и b. Приведите пример, когда $x \neq y$.*

◇ **2.6.** *Перечислите (с точностью до изоморфизма) все конечные группы, состоящие из 2, 3 и 4 элементов. Напишите их таблицы умножения.*

◇ **2.7.** *Приведите пример а) конечной нециклической группы; б) конечной некоммутативногй группы; в) двух неизоморфных конечных групп, содержащих одинаковое количество элементов.*

◇ **2.8.** *а) Докажите, что в произвольном кольце умножение на ноль всегда дает ноль: $a0 = 0$.*
б) Докажите, что в произвольном кольце $(-a)b = -ab$. В частности, $(-1)a = -a$.
в) Докажите, что при изоморфизме колец $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ и $\varphi(0) = 0$.

◇ **2.9.** *а) Докажите, что любое коммутативное ассоциативное кольцо с единицей содержит подкольцо, изоморфное $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_n$ для некоторого n.*
б) Докажите, что если в условиях п. а) кольцо не имеет делителей нуля, то число n обязательно простое. Оно называется **характеристикой** *этого кольца.*

◇ **2.10.** *Верно ли, что в любом коммутативном ассоциативном кольце с единицей*
а) произведение двух обратимых элементов является обратимым элементом?
б) если произведение двух элементов является обратимым элементом, то оба сомножителя являются обратимыми элементами?
в) если произведение двух элементов является делителем нуля, то оба сомножителя являются делителями нуля?
г) если произведение двух элементов является делителем нуля, то хотя бы один сомножитель является делителем нуля?
д) произведение двух нильпотентных элементов является нильпотентным элементом?
е) если произведение двух элементов является нильпотентным, то хотя бы один сомножитель является нильпотентным?

ж) произведение любого элемента на нильпотентный является нильпотентным?
з) произведение двух идемпотентных элементов, является идемпотентным?
и) сумма двух обратимых элементов снова является обратимым?
к) сумма двух делителей нуля снова является делителем нуля?
л) сумма двух нильпотентных элементов снова является нильпотентным?

$\diamond$ **2.11.** *Докажите, что а) идемпотентные элементы всегда являются делителями нуля.*
б) если элемент кольца x является идемпотентным, то $1 - x$ тоже является идемпотентным.

$\diamond$ **2.12.** *Докажите, что следующие множества с заданными на них операциями сложения и умножения являются кольцами (коммутативными ассоциативными и с единицей!). Найдите в них все делители нуля, нильпотентные и идемпотентные элементы (или докажите, что таких нет).*
а) Множество всех непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения функций.
б) Множество всех непрерывных функций из $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ в $\mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения функций.
в) Множество всех подмножеств данного множества Ω; в качестве операции сложения берется симметрическая разность двух множеств, а в качестве умножения — пересечение.
г) Множество всех линейных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (т.е. всех $f(x) = kx + b$, $k, b \in \mathbb{R}$); в качестве сложения берется обычное сложение функций, а умножение определяется следующим геометрическим способом. Две линейные функции перемножаются обычным образом, получается квадратный трехчлен, графиком которого является парабола (или прямая, если один из сомножителей был константой). К полученному графику проводится касательная в точке его пересечения с осью ординат; правая часть уравнения полученной прямой в виде $y = kx + b$ и называется произведением двух исходных функций в этом кольце.
д) Множество векторов плоскости, на которой введена прямоугольная система координат. В качестве сложения берется обычное сложение векторов, а умножение (которое мы в этой задаче, чтобы не создавать путаницы, будем обозначать звездочкой) определяется следующим образом. Если два вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ имеют координаты $\vec{u} = (a; b)$ то $\vec{v} = (c; d)$ то $\vec{u} * \vec{v} = (ac; bd)$.
е) Изменим в условиях предыдущей задачи закон умножения: $\vec{u} * \vec{v} = (ac - bd; ad + bc)$.
ж) Докажите, что кольца из последних трех пунктов попарно не изоморфны друг другу.

$\diamond$ **2.13.** *При каких значениях n и m кольца $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ и $\mathbb{Z}_{nm}$ изоморфны? Найдите необходимое и достаточное условие.*

$\diamond$ **2.14.** *а) Докажите, что любое кольцо из двух элементов изоморфно $\mathbb{Z}_2$.*
б) Докажите, что любое кольцо из трех элементов изоморфно $\mathbb{Z}_3$.
в) Перечислите (с точностью до изоморфизма) все кольца, состоящие из четырех элементов.

$\diamond$ **2.15. *** *Заметим, что примеры колец из п. д) и е) задачи 2.12 построены похожим образом. Естественно спросить, какие еще кольца можно так получить. Зафиксируем какие-нибудь действительные числа α_1, α, β_1, β, γ_1, γ, δ_1 и δ_2 и определим закон умножения на множестве векторов плоскости следующим образом: $\vec{u} * \vec{v} = (\alpha_1 ac + \beta_1 bc + \gamma_1 ad + \delta_1 bd; \alpha_2 ac + \beta_2 bc + \gamma_2 ad + \delta_2 bd)$. (Здесь, как и в 2.12, $\vec{u} = (a; b)$ то $\vec{v} = (c; d)$.) Интересно выяснить, при каких значениях α_1, α, β_1, β, γ_1, γ, δ_1 и δ_2 получится коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Отметим, что нужно уточнить вопрос, поскольку в кольцах из п. д) и е) задачи 2.12 получились разные единичные элементы. Выберем в качестве основного вариант п. е): потребуем, чтобы единичным элементом был вектор $(1; 0)$.*
а) При каких значениях констант α_1, α, β_1, β, γ_1, γ, δ_1 и δ_2 получится коммутативное ассоциативное кольцо, единичным элементом которого будет вектор $(1; 0)$?
б) Найдутся ли среди полученных колец кольца, изоморфные кольцу из п. г) задачи 2.12?
в) Найдутся ли среди полученных колец кольца, изоморфные кольцу из п. д) задачи 2.12?
г) Найдутся ли среди полученных колец кольца, не изоморфные кольцам из п. г), д) и е) задачи 2.12?