3. Задачи по курсу «Теория представления».

Пусть **V** – конечномерное векторное пространство размерности n над полем комплексных чисел, **GL(V)** – группа обратимых линейных преобразований пространства **V**.

1. Группа **GL(V)** естественно действует на пространстве многочленов от **n** переменных. Покажите, что представление в пространстве многочленов данной степени неприводимо.
2. Разложите на неприводимые тензорное произведение

   а) Представления в пространстве многочленов степени **s** и представления в пространстве многочленов в степени **1**.

   б) Представлений в пространстве многочленов степеней **s** и **k**.

3. Группа **GL(V)** естественно действует в пространстве **V**. Это представление называется тавтологическим. Разложите на неприводимые тензорное произведение:

   а) Двух копий **V**.

   б) Трёх копий **V**.

«Разложить» значит явно указать соответствующие инвариантные подпространства. Найдите размерности неприводимых представлений **GL(V),** которые входят в разложение.

4. Пусть теперь **V** – двумерное пространство. Разложите на неприводимые тензорное произведение m копий представления **V**.
5. Пусть **X** – конечное множество из двух элементов. На множестве **XxXx…xX** (**m** раз) очевидным образом действует симметрическая группа, переставляющая сомножители. Обозначим через **W** пространство комплекснозначных функций на **XxXx…xX**. Ясно, что **W** – представление симметрической группы. Разложите его на неприводимые.
6. Задачи №4 и №5 тесно связаны друг с другом. А именно, тензорное произведение m копий двумерного **W** и пространство функций на **XxXx…xX** можно отождествить таким образом, что действия симметрической группы и **GL(V)** коммутируют. То есть, на самом деле, на пространстве **W** действует произведение двух групп. Разложите **W** на неприводимые относительно действия произведения этих двух групп.
7. Найдите все неприводимые представления группы симметрий правильного треугольника.
8. Найдите все неприводимые представления группы диэдра.