Листок 4: Кольца частных. Целые расширения.

Задачи по коммутативной алгебре - матфак ВШЭ

надо сдать до 19.10.2012 включительно

!!! ПРАВИЛА !!!

Баллы за листок засчитываются, если в нем сдано не меньше половины задач. Задача, сданная в срок - это один балл, не в срок - полбалла. Потом баллы суммируются и из них выводится оценка за листки таким образом, чтобы студент, сдавший в срок не меньше трех четвертей задач из каждого листка, получил максимум. Итоговая оценка - это среднее арифметическое оценки за контрольную (по одной в каждом модуле) и оценки за листки. Для промежуточного зачета (первый модуль) будут учитываться первые четыре листка. Потом их будет еще штук пять.

1 Покажите, что любой идеал в кольце частных $S^{-1}A$ – вида $S^{-1}I$, где I идеал в A. Когда $S^{-1}I = S^{-1}A$?

2 Покажите, что имеется биекция между множеством простых идеалов в $S^{-1}A$ и множеством простых идеалов в A, не пересекающихся с S, являющаяся к тому же гомеоморфизмом в топологии Зариского.

3 Используя кольца частных, найдите еще одно доказательство того факта, что нильрадикал есть пересечение всех простых идеалов.

Напомним, что $S^{-1}A$-модуль частных $S^{-1}M$ – это множество классов эквивалентности пар (m, s), где $(m, s) \sim (m', s')$, если $u(s'm - ms') = 0$ для некоторого $u \in S$, с очевидными операциями. Гомоморфизм $f : M \to N$ индуцирует $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N$, где m/s переходит в $f(m)/s$.

4 Пусть A кольцо и M – A-модуль. Покажите, что если $M_{\mathfrak{m}} = 0$ для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m} \subset A$, то $M = 0$.

5 Пусть $f : M \to N$ – гомоморфизм A-модулей. Покажите эквивалентность следующих условий: (1) f сюръективен; (2) для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$, $f_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p}$ сюръективен; (3) для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m}$, $f_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to M_\mathfrak{m}$ сюръективен. То же верно и для инъективности.

6 Пусть A кольцо и M – A-модуль. Носитель M - это подмножество $Spec(A)$, состоящее из таких идеалов $\mathfrak{p}$, что $M_\mathfrak{p} \neq 0$. Покажите, что если M конечно порожден, то его носитель замкнут в топологии Зариского ($Supp(M) = V(??)$). Удобно для начала разобрать случай, когда M порожден одним элементом (что можно тогда сказать об M?)

Пусть $A \subset B$ – кольца. Напомним, что $x \in B$ цел над A, если он удовлетворяет полиномиальному уравнению с коэффициентами из A, причем старший коэффициент – единица. B цело над A, если все его элементы целы над A. Целое замыкание A в B - это множество элементов B, целых над A. Оно является подкольцом B. Говорят, что область целостности целозамкнута, если она целозамкнута в своем поле частных. Например, любое факториальное кольцо целозамкнуто (проверить!).

7 Целозамкнуто ли кольцо $\mathbf{C}[x, y]/(x^2 - y^3)$? Опишите его целое замыкание (в поле частных).

8 Пусть кольцо B цело над A, $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset B$ – простые идеалы. Покажите, что если $q_1 \cap A = q_2 \cap A$, то $q_1 = q_2$.

9 Пусть G конечная группа автоморфизмов кольца B и $A = B^G$ - подкольцо инвариантов. Покажите, что B цело над A.

10 (Это упражнение не по теме листка, оно служит леммой для следующего.) Пусть $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ простые идеалы, а идеал $I \subset \cup_{i=1}^k \mathfrak{p}_i$. Докажите, что I содержится в одном из $\mathfrak{p}_i$.

Пусть теперь $\mathfrak{p}$ – простой идеал, содержащий пересечение идеалов J_i, $i = 1, \ldots, k$. Докажите, что $\mathfrak{p}$ содержит один из J_i.

11 Пусть теперь $\mathfrak{p}$ – простой идеал в $A = B^G$, а Q - множество таких простых идеалов $\mathfrak{q}$ в B, что $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. Докажите, что G транзитивно действует на множестве Q. Указание: пусть $I_1, I_2 \in Q$, покажите, что I_1 содержится в объединении $g(I_2), g \in G$. Потом воспользуйтесь предыдущим упражнением.