ПУЧКИ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

ЛИСТОК 3: ПРОДОЛЖЕНИЕ ПЕРВЫХ ДВУХ

Осень 2012 года

Всюду в этом листке под "предпучками" и "пучками" подразумеваются предпучки и пучки абелевых групп. Последовательность предпучков и гомоморфизмов $\cdots \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \cdots$ называется *точной в члене* $\mathcal{Q}$, если образ гомоморфизма $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ (рассматриваемого как гомоморфизм предпучков) совпадает с ядром гомоморфизма $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R}$. Последовательность пучков и гомоморфизмов $\cdots \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \cdots$ называется *точной в члене* $\mathcal{G}$, если образ гомоморфизма $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ (рассматриваемого как гомоморфизм пучков) совпадает с ядром гомоморфизма $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$. Последовательность (пред)пучков и гомоморфизмов называется *точной*, если она точна во всех своих внутренних членах. *Короткой точной последовательностью* называется точная последовательность вида $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$.

Задача 1. Покажите, что

а) последовательность предпучков $\cdots \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \cdots$ на пространстве X точна тогда и только тогда, когда последовательность групп сечений $\cdots \longrightarrow \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}(U) \longrightarrow \mathcal{R}(U) \longrightarrow \cdots$ точна для всех открытых подмножеств $U \subset X$;

б) последовательность пучков $\cdots \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \cdots$ на пространстве X точна тогда и только тогда, когда индуцированная последовательность слоев $\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \longrightarrow \cdots$ точна для всех точек $x \in X$;

в) для любой точной последовательности предпучков $\cdots \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \cdots$, последовательность ассоциированных пучков $\cdots \longrightarrow \mathcal{P}^+ \longrightarrow \mathcal{Q}^+ \longrightarrow \mathcal{R}^+ \longrightarrow \cdots$ является точной последовательностью пучков (в такой ситуации говорят, что функтор пучковизации $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P}^+$ *точен*);

г) последовательность ассоциированных пучков из пункта в), *рассматриваемая как последовательность предпучков*, может не быть точной (приведите контрпример).

Задача 2. Пусть X — топологическое пространство, $Z \subset X$ — его замкнутое подмножество, снабженное индуцированной топологией, $i\colon Z \longrightarrow X$ — отображение естественного вложения, и $\mathcal{F}$ — пучок на X. Определим предпучок $i^!\mathcal{F}$ на Z следующим образом. Для любого открытого подмножества $V \subset Z$, выберем какое-нибудь открытое подмножество $U \subset X$, такое что $V = U \cap Z$. Группа $(i^!\mathcal{F})(V)$ определяется как подгруппа в $\mathcal{F}(U)$, состоящая из всех сечений $s \in \mathcal{F}(U)$, слои которых $s_x \in \mathcal{F}_x$ зануляются во всех точках $x \in U \setminus V$.

а) Покажите, что сформулированное правило в самом деле определяет предпучок на Z (в частности, что группа $(i^!\mathcal{F})(V)$ корректно определена, т.е. не зависит от выбора открытого подмножества U).

б) Покажите, что предпучок $i^!\mathcal{F}$ является пучком. Пучок $i^!\mathcal{F}$ называется *ограничением с носителем* пучка $\mathcal{F}$ на замкнутое подмножество $Z \subset X$.

в) Для любого пучка $\mathcal{G}$ на Z постройте изоморфизм между группой всех гомоморфизмов пучков $G \longrightarrow i^!\mathcal{F}$ на Z и группой всех гомоморфизмов пучков $i_*\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ на X. (Другими словами, функтор $i^!$ сопряжен справа к функтору прямого образа i_*.)

Задача 3. Пусть X — топологическое пространство, $Z \subset X$ — его замкнутое подмножество, и $U = X \setminus Z$ — его открытое дополнение. Снабдим Z и U индуцированными топологиями, и обозначим через $i\colon Z \longrightarrow X$ и $j\colon U \longrightarrow X$ естественные вложения. Пусть $\mathcal{F}$ — произвольный пучок на X.

а) Постройте точную последовательность пучков на X

$$0 \longrightarrow j_!j^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_*i^*\mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

б) Постройте точную последовательность пучков на X

$$0 \longrightarrow i_*i^!\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow j_*j^*\mathcal{F}.$$

в) Приведите контрпример, показывающий, что последовательность из пункта б) (продолженная нулевым пучком) может не быть точной в правом члене.

Задача 4. Для каждого из следующих открытых вложений $j\colon U \longrightarrow X$ нужно 1) вычислить слои прямого образа постоянного пучка $j_*\underline{\mathbb{Z}}$ во всех точках $x \in X$; и 2) описать пучок $j_*\underline{\mathbb{Z}}$ на X, выразив его через операции

- прямого образа i_* при замкнутых вложениях i и

- продолжения нулем $k_!$ при открытых вложениях k каких-то топологических пространств,

- примененные к постоянному пучку $\underline{\mathbb{Z}}$,

- а также операцию перехода от двух крайних членов короткой точной последовательности к среднему:

а) $X = \mathbb{R}$ — прямая, $U = \,]0,1[$ — интервал;

б) $X = \mathbb{R}$ — прямая, $U = \,]0,1[\,\cup\,]1,2[$ — объединение двух интервалов с общим концом;

в) $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость, $U = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ — внутренность круга;

г) $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ — дополнение к точке;

д) $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}$ — дополнение к прямой;

е) $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость, $U = \mathbb{R}^2_+ \cup \mathbb{R}^2_-$ — объединение внутренностей первого и третьего квадрантов;

ж) $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость, $U = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+$ — объединение внутренностей первого и второго квадрантов;

з) $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость, $U = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$ — дополнение к двум пересекающимся прямым.