Спецфункции 2012. Листок 2

1. а) Покажите, что $\Gamma(z)$ - вещественная функция, т.е., $\bar{\Gamma}(z) = \Gamma(\bar{z})\ \forall z \in \mathbb{C}$;

   б) Покажите, что $\Gamma(z)$ быстро убывает на мнимой оси, а именно: для всякого чисто мнимого числа $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$,
$$|\Gamma(iy)| = \sqrt{\frac{\pi}{y \operatorname{sh} \pi y}}$$

2. Пусть $a_1, \ldots, a_k$, $b_1 \ldots, b_l \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Докажите, что бесконечное произведение
$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1+n)\cdots(a_k+n)}{(b_1+n)\cdots(b_l+n)}$$
сходится тогда и только тогда, когда оно уравновешенно, т.е., $k = l$ и $a_1 + \cdots + a_k = b_1 + \cdots + b_l$, и равно в этом случае отношению $\dfrac{\Gamma(b_1)\cdots\Gamma(b_l)}{\Gamma(a_1)\cdots\Gamma(a_k)}$.

3. Пусть $f(x)$, где $x \geq 0$ -непрерывная функция, такая, что $\forall A > 0$ интеграл $\int_A^{+\infty} f(x)\frac{dx}{x}$ абсолютно сходится. Докажите, что для любых $a, b > 0$ интеграл Фруллани
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \qquad \text{абсолютно сходится и равен} \qquad f(0)\log\frac{b}{a}.$$

4. Пользуясь интегралом Фруллани, покажите, что при условии сходимости бесконечного произведения
$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1+n)\cdots(a_k+n)}{(b_1+n)\cdots(b_k+n)} = \exp\int_0^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(e^{-b_i t} - e^{-a_i t}\right)}{1-e^{-t}}\frac{dt}{t}.$$

5.* Найдите условия сходимости и интегральное представление для двойного произведения
$$\prod_{n,m=0}^{\infty} \frac{(a_1+n+mh)\cdots(a_k+n+mh)}{(b_1+n+mh)\cdots(b_k+n+mh)}, \qquad h \notin \mathbb{Z}$$

6. а) Найдите дифференциальное уравнение первого порядка, решением которого является функция $\pi \operatorname{ctg} \pi t$

   б)* Проверьте, что ряд Эйзенштейна
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z+n} := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z+n}$$
   является решением этого дифференциального уравнения.

   в)* Докажите таким образом формулу дополнения Эйлера: $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$.

7. Докажите, что при $\operatorname{Re} z > 0$
$$\frac{d^2 \log\Gamma(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^{\infty} \frac{te^{tz}}{1-e^t} dt.$$

8. Покажите, что
$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\left(e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{t^k}{k!}\right) dt,$$
где k - наименьшее целое неотрицательное число, такое, что $\operatorname{Re} z > -k-1$.

9.* Постройте аналитическое продолжение по параметрам α, β эйлеровского интеграла $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ методом Ханкеля. Указание: соответствующий контур интегрирования - топологически нетривиальная двойная петля вокруг точек 0 и 1 с нулевым изменением аргумента вокруг каждой из этих точек.