КОНСПЕКТ ЛЕКТОРА
математический анализ, 2 курс, 1 модуль
ВШЭ, факультет математики, сентябрь-октябрь 2012

А.М. Красносельский

Лекция 1 (03 сентября 2012)

Когда на 1м курсе было введено понятие определенного интеграла, то там всегда были 2 предположения:

1. Промежуток интегрирования был конечный;

2. Подинтегральная функция была ограниченная.

Для всяких практических и математических нужд надо от этих предположений научиться иногда отказываться.

1. Несобственные интегралы

1.1. Определения. Понятие сходимости несобственных интегралов

$$\int_a^\infty f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx, \quad f(b) = \infty.$$

Предполагаем, что интегрируемые функции непрерывны, можно в большей общности.

Определение 1. Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на луче $[a, \infty)$. Если существует конечный предел

$$I = \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)dx,$$

то говорят, что сходится несобственный интеграл

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

и его величина равна I.

Таким образом, значок $\int^\infty \ldots$ — это обозначение предела $\lim_{u\to\infty} \int^u \ldots$.

Формула $\displaystyle\int^\infty f(x)dx$, её смысл, если $f \geq 0$, то $\displaystyle\int^\infty f(x)dx < \infty$ означает сходимость.

Определение 2. Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную и непрерывную на $[a, b)$ и не ограниченную в окрестности точки b). Основной вариант: $\lim_{x\to b-0} f(x) = \infty$, $(+\infty$ или $-\infty)$. Если существует конечный предел

$$I = \lim_{y\to b-0} \int_a^y f(x)dx,$$

то говорят, что сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx \tag{1}$$

и его величина равна I.

Аналогично можно определить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и интеграл (1) для случая, когда функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $(a,b]$ и не существует предел $\lim_{x\to a+0} f(x)$.

Подчеркнем, что интегралы с двумя особенностями пока что не рассматриваем.

Возможно альтернативное определение интеграла от неограниченной функции на $[a,b]$ через срезки подинтегральной функции. Это "то же самое".

1.2. Критерии сходимости $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

1. Критерий Коши — сходится, если и только если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall M_1, M_2 > N \qquad \text{справедливо}\ \Big|\int\limits_{M_1}^{M_2} f(x)dx\Big| \le \varepsilon.$$

Аналог критериев Коши существования пределов функций-последовательностей-рядов.

2. Абсолютная сходимость, сходимость следует из абсолютной сходимости, критерии абсолютной сходимости (оценки).

3. Если интеграл от положительной функции сходится, обязательно ли она стремится к нулю на бесконечности?

Контрпример с неограниченной функцией: для $n = 2, 3, \ldots \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = 0,\ \text{если}\ |n - x| \ge 1/n^3\ ;\ f(n) = n;\ f(x)\ \text{линейна на оставшихся промежутках.}$$

Другой пример будет потом, он связан с **интегралами Френеля**, используемыми в оптике.

4. Связь с рядами — интегральный критерий Коши из 1го курса (монотонная функция, интеграл $\int^\infty f(x)dx$ сходится одновременно с рядом $\sum f(n)$).

5. **Примеры.** Граничная функция $1/(x \cdot \ln x \cdot \ldots \cdot \ln^\alpha x),\ \alpha > 1$.

Возврат к первому курсу. Теоремы о среднем.

1.3. Первая теорема о среднем. $\exists\ \ c \in [\min f, \max f]$: $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = c\int\limits_a^\xi g(x)dx$

Если f непрерывна, то $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^\xi g(x)dx$ при некотором $\xi \in [a,b]$.

1.4. Вторая теорема о среднем. Если f монотонная, то $\exists\xi\in[a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)dx + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)dx$$

Первая формула Бонне (O.Bonnet): $f\geq 0$ и убывает, то $\exists\xi\in[a,b]$

$$I=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)dx$$

Доказательство: $\quad I=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx=\sigma+\rho,\qquad$ где

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx,\qquad \rho=\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x)-f(x_i)]g(x)dx$$

Очевидно, что $\rho\to 0$ при измельчении разбиения. Пусть

$$G(x)=\int\limits_a^x g(t)dt,\quad\Rightarrow\quad \sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)[G(x_{i+1})-G(x_i)].$$

Перегруппируем $\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n-1} G(x_i)[f(x_{i-1})-f(x_i)]+G(b)f(x_{n-1})$..

Пусть $\max G=M,\ \min G=m,\Rightarrow m\,f(a)\leq\sigma\leq M\,f(a)\Rightarrow I=f(a)G(\xi)$ чтд

Вторая формула Бонне: $f\geq 0$ и возрастает, то при некотором $\xi\in[a,b]$

$$I=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int\limits_\xi^b g(x)dx$$

1.5. Критерии Абеля и Дирихле.

Абель: Пусть сходится $\int\limits_a^\infty g(x)dx$, f монотонна и ограничена, $\Rightarrow$ сходится $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$.

Дирихле: Пусть функция $u\mapsto\int\limits_a^u g(x)dx$ ограничена, пусть f монотонна и $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, тогда сходится $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$.

Доказательства следуют из второй теоремы о среднем и критерия Коши.

Интегральный синус, пример интеграла, который сходится, но не абсолютно. Рассуждение про интегральный синус, что интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

сходится, через признак Лиувилля сходимости знакопеременных рядов. Через ряд можно увидеть, что этот интеграл расходится абсолютно.

Сходимость несобственных интегралов Френеля: $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)dx$ и $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)dx$ без их вычисления.

Задачи из листка.

1.5. Пусть функция $f(x)$ монотонна и пусть интеграл на бесконечности от нее сходится. Доказать, что $\lim_{x\to\infty}\big(xf(x)\big) = 0$.

1.6. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию глобальному условию Липшица на полуоси $[0,\infty)$ и пусть интеграл на бесконечности от нее сходится. Доказать, что $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Лекция 2 (12 сентября 2012)

Рассуждения на тему вычисления несобственных интегралов. Основные методы: **замена переменных** и **интегрирование по частям**.

Возможность применения обоих методов, если потом честно переходить к пределу.

Замена переменных может перевести собственный интеграл в сходящийся несобственный. Простейший пример:

$$1 = \int\limits_0^1 dx = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

1.6. Критерии сходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$**,** $f(b) = \infty$**.** Еще раз определение. Рассмотрим $f(x)$, определенную и непрерывную на $[a,b)$ и не ограниченную в окрестности точки b (**в любой** окрестности $(b-\varepsilon, b)$ функция f не ограничена). Основной вариант: $\lim_{x\to b-0} f(x) = \infty$, $(+\infty$ или $-\infty)$.

Определение. Если существует конечный предел

$$I = \lim_{y\to b-0} \int\limits_a^y f(x)dx,$$

то говорят, что сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx \tag{2}$$

и его величина равна I.

Подчеркнем еще раз 2 вещи:

1) вместо непрерывной функции можно рассматривать кусочно непрерывные или интегрируемые по Риману, поговорить чуть-чуть про интеграл Римана; сказать, что разрывы второго рода не входят в несобственный интеграл, если функция ограничена в окрестности. Пример:

$$\int\limits_0^1 \Big(1+\sin\big(\frac{1}{1-y}\big)\Big)\,dy = \int\limits_1^\infty \frac{(1+\sin x)dx}{x^2}, \quad \text{замена} \quad x=\frac{1}{1-y}, \quad dx=\frac{dy}{(1-y)^2}, \quad dx=x^2dy;$$

2) по-прежнему, мы рассматриваем пока что функции с единственной особенностью.

1. Критерий Коши — формулировка: несобственный интеграл (2) сходится $\Leftrightarrow$

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall\ \ b_1,b_2\in(b-\varepsilon,b)\ \ \text{справедливо}\ \ \Big|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\Big|<\varepsilon.$$

2. Пример такого интеграла, который сходится, но не абсолютно:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{1-y}\sin\big(\frac{1}{1-y}\big)\,dy, \quad \text{замена} \quad x=\frac{1}{1-y}, \quad dx=\frac{dy}{(1-y)^2}, \quad dx=x^2dy;$$

получится интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \text{который сходится.}$$

Это вычурный пример, в нормальной ситуации для интегралов (2) сходимость и абсолютная сходимость совпадают.

3. Положительные функции, сравнение. x^α, $1/\big(x\ln^\alpha(x)\big)$, $1/\big(x\ln x\ln^\alpha\ln x\big)$ $\ x\in(0,\varepsilon)$.

1.7. Сходимость в смысле главного значения. Интеграл на промежутке $(-\infty,+\infty)$: Было бы естественно считать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty,B\to\infty}\int\limits_{-A}^{+B} f(x)dx.$$

Определение:

$$\lim_{A\to\infty,B\to\infty} g(A,B)=\ell\ \ \exists \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0\ \exists\ C>0:\ \ \forall A,B>C\ \ \text{справедливо}\ \ \Big|\int\limits_{-A}^{+B} f(x)dx-\ell\Big|<\varepsilon.$$

Если интегралы

$$\int^\infty f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{-\infty} f(x)dx$$

сходятся, то такой предел существует и нет проблем. Однако бывает, что интегралы эти расходятся оба, но существует

$$\lim_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{+M} f(x)dx = \mathrm{V.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Называется главным значением. Пример: $f(x)=x$, главное значение равно 0. Нечетные функции все такие.

Используется, в частности, в теории интегралов Фурье.

Аналогично для неограниченных функций: определение, примеры:

$$\mathrm{V.\,p.}\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x} = \ln 2.$$

Интеграл с несколькими особенностями в смысле главного значения.

Пример. Формальное применение правила Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2.$$

Что совсем странно... интеграл от положительной функции. Попробуем посчитать V. p.

$$\mathrm{V.\,p.}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{u\to 0}\Big(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-u} - \frac{1}{x}\Big|_{u}^{1}\Big) = -2 + \lim_{u\to +0}\frac{2}{u}.$$

То есть V. p. не существует... или равно ∞, как кому нравится говорить.

2. Бесконечные произведения

2.1. Сходимость. Бесконечное произведение: $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$.

Классический объект. Эйлер применял их для вычисления количества $p(n)$ всех разбиений натурального числа. $p(1)=1, p(2)=2, p(3)=3, p(4)=5, p(5)=7, ..., p(100)=190569292$, это было известно ещё в 19м веке.

Через бесконечные произведения получалась пентагональная теорема

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty}(-1)^q x^{(3q^2+q)/2}$$

(числа $(3q^2+q)/2$ называются пентагональными) и рекуррентная формула для $p(n)$ (не приводится). Эйлер доказал придуманную им пентагональную теорему через 14 лет.

Определение: произведение называется сходящимся, если $\exists \lim p_n \neq 0,\ \ p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$; произведение называется расходящимся, если $\lim p_n$ не существует; произведение называется расходящимся к нулю, если $\lim p_n = 0$.

Необходимое условие сходимости: $\lim u_n = 1$. В частности, отрицательных сомножителей не более конечного числа.

Необходимое и достаточное условие сходимости: $u_n = 1 + a_n,\ a_n > -1$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \text{ сходится } \Leftrightarrow \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n) \text{ сходится}$$

Абсолютная сходимость (определение: если $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ сходится), теорема

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \text{ абсолютно сходится } \Leftrightarrow \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ сходится}$$

Теорема. Если ряд $\sum a_n$ сходится, то

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \text{ сходится одновременно с рядом } \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$$

Пример Эйлера:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{1+1/n} = e^c, \qquad c \text{ — константа Эйлера,} \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n+1)+c+o(1)$$

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{e^{1/n}}{1+1/n} = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}}}{(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})\ldots(1+\frac{1}{(N+1)})} = \frac{e^{\ln(N+1)+c+o(1)}}{N+1} \to e^c$$

2.2. Разложение синуса, формула Валлиса.

$$\sin x = x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\big(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}\big)$$

Докажем это.

1) $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$ при $x\in[0,\pi/2]$

2) $\big|\prod_{k=m}^{n}(1+a_k)-1\big| \le \prod_{k=m}^{n}(1+|a_k|)-1$

Можно доказать по индукции. Можно раскрыть скобки, вроде, очевидно.

3) $\sin(2n+1)x = (2n+1)\sin x\ P_n(\sin^2 x)$, где P_n — многочлен. По индукции.

4) В этом равенстве $\sin(2n+1)x = 0$ при $x = \pi k/(2n+1),\ k = 1,\ldots,n$.

Поэтому у многочлена P_n известны n разных корней $\sin^2(\pi k/(2n+1))$. Значит

$$P_n(y) = A\ \prod_{k=1}^{n}\Big(y-\sin^2\frac{k}{2n+1}\Big)$$

где A — коэффициент.

5) Найдем A. Подставим $y := \sin^2 x$:

$$A\prod_{k=1}^{n}\Big(\sin^2 x-\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}\Big) = \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)\sin x}$$

$$\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)\sin x} = A\prod_{k=1}^{n}\Big(-\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}\Big)\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\Big) = A_n\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\Big)$$

Если теперь перейти к пределу при $x\to 0$, получим, что $A_n = 1$.

6) Заменим $x := (2n+1)x$,

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\Big)$$

возьмем $m:\ \pi m < 2n+1$ и разобьем $\prod_{k=1}^{n}\ldots = \prod_{k=1}^{m}\ldots\prod_{k=m+1}^{n}\ldots$.

7) Сначала оценим второе произведение

$$P_{n,m} = \prod_{k=m+1}^{n}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\Big).$$

В силу неравенства 2)

$$|1-P_{n,m}| \le \prod_{k=m+1}^{n}\Big(1+\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\Big)-1.$$

А так как в силу неравенств 1)

$$\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}} \le \frac{x^2}{4k^2},$$

то

$$|1-P_{n,m}| \le \prod_{k=m+1}^{n}(1+\frac{x^2}{4k^2})-1 \le \prod_{k=m+1}^{\infty}(1+\frac{x^2}{4k^2})-1$$

8) Теперь вернемся к первому сомножителю-произведению $\prod_{k=1}^{m}\ldots$. Перейдем в равенстве

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{m}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\Big)P_{n,m}$$

к пределу при $n\to\infty$. Левая часть стремится к $\sin x/x$, справа стоит сомножитель

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\Big) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\Big(1-\Big(\frac{\frac{x}{2n+1}}{\frac{\pi k}{2n+1}}\Big)^2\Big) = \prod_{k=1}^{m}\Big(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}\Big)$$

Теперь получили, что $P_{n,m}\to P_m$ при $n\to\infty$. Очевидно, что $|1-P_m|\to 0$ при $m\to\infty$, то есть

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2})$$

$$\boxed{\text{Формула Валлиса}\quad \frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1}}$$

Лекция 3 (17 сентября 2012)

Итак, на прошлой лекции мы

1) Рассматривали интегралы от неограниченных функций по ограниченным промежуткам;

2) Рассмотрели главные значения

3) Рассматривали бесконечные произведения, признаки сходимости и абсолютной сходимости;

4) Разложили синус в бесконечное произведение (это нам скоро понадобится для Г-функции).

Сегодня начинаем новую тему, большую и важную, более теоретическую.

3. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть $y \in Y = [c, d]$, $a(y), b(y) \in C[c, d]$, пусть при каждом y функция $f(x, y)$ (как функция переменной x) интегрируема (непрерывна) на промежутке $[a(y), b(y)]$. Тогда определена функция

$$\Phi(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx, \quad \text{часто } a(y) \text{ и } b(y) \text{ — постоянные:} \quad \Phi(y) = \int\limits_{a}^{b} f(x, y)dx.$$

— это и есть интеграл, зависящий от параметра.

Пример.

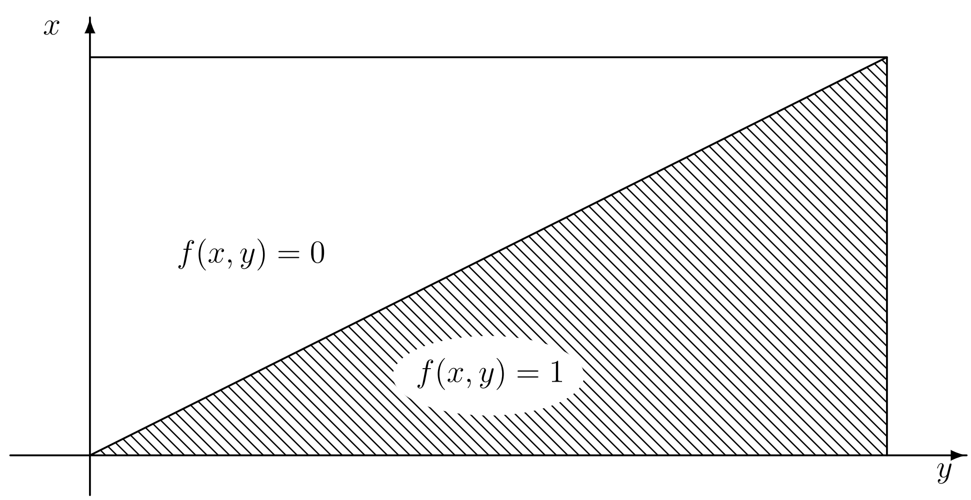


Рис. 1: Пример

Тут вроде как функция разрывна, однако можно свести к случаю непрерывному.

3.1. Непрерывность, дифференцируемость. Мы считаем, что $a(y) < b(y)$, однако, это не важно, просто, чтобы картинку рисовать естественнее.

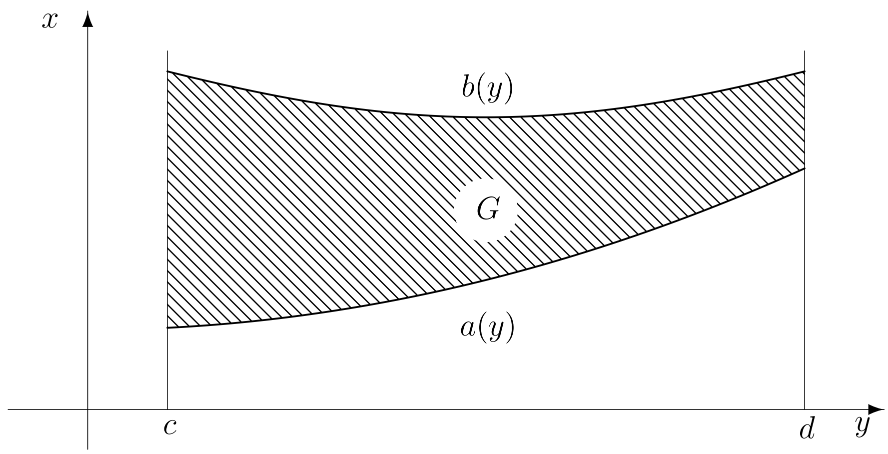


Рис. 2: Область G на плоскости $\{x, y\}$

Обозначим $G = \{(x, y) : y \in [c, d], x \in [a(y), b(y)]\}$.

Теорема. $a(y), b(y) \in C[c, d],\ f(x, y) \in C(G) \ \Rightarrow\ \Phi(y) \in C[a, b]$.

Доказательство. Пишем $|\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)| \leq \ldots$, оцениваем через 3 слагаемых, 2 оцениваются легко, одно — через равномерную непрерывность функции f по теореме Кантора (G — компакт).

Следствие (перестановка интеграла и предела). Пусть $c \in (a, b) \Rightarrow G$ — прямоугольник,

$$\lim_{y\to c}\int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to c} f(x, y)dx = \int\limits_a^b f(x, c)dx.$$

Теорема. $a(y), b(y) \in C^1[c, d],\ f(x, y) \in C(G)\ \exists f'_y(x, y) \in C(G) \ \Rightarrow\ \Phi(y) \in C^1[a, b]$ и

$$\Phi'(y) = f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y) + \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)dx$$

Доказательство. В лоб: пишем $\Delta\Phi(y)/\Delta y$ и расписываем по кусочкам. К кусочку, порождающему слагаемое с интегралом, применяем теорему о непрерывности по Δy, к остальным двум — теорему о среднем, всё получится.

3.2. Перестановка интегралов. Теорема. Пусть $f(x, y) \in C([a, b] \times [c, d])$. Тогда

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy\right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)dx\right) dy.$$

Доказательство.

1) Рассмотрим функцию

$$F(t,y)=\int\limits_a^t f(x,y)dx.$$

2) Докажем, что $F\in C([a,b]\times[c,d])$.

3) Положим,

$$F_1(t)=\int\limits_a^t\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx,\qquad F_2(t)=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^t f(x,y)dx\right)dy$$

Продифференцируем их:

$$F_1'(t)=\int\limits_c^d f(t,y)dy,\qquad F_2'(t)=\int\limits_c^d f(t,y)dy\ \Rightarrow\ F_1(t)-F_2(t)\equiv const$$

4) Теперь $F_1(a)=F_2(a)=0\ \Rightarrow\ F_1(b)=F_2(b)$ чтд.

4. Общие рассуждения про равномерность

Воспоминания о I курсе.

1) Равномерная непрерывность;

2) Равномерная сходимость последовательностей (ступенчатых функций), обозначение $\rightrightarrows$;

3) **Теорема.** $f_n\in C[a,b]\rightrightarrows f\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

4) Равномерный предел последовательности непрерывных функций — непрерывная функция (Задача 3.8).

5) Перестановки пределов разных видов... переставить пределы в функции двух переменных, ряд с пределом, производную с рядом.

6) Ряд из положительных функций сходится поточечно $\Rightarrow$ сходится равномерно (Задача 5.6).

Теорема Дини: Пусть $f_n\in C[a,b],\ \ \forall n\in\mathbb{N};\ \ \ \exists\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

$f\in C[a,b],\ \&\ f_n(x)$ монотонна $\forall\ x\in[a,b]\ \ \Rightarrow\ \ f_n\rightrightarrows f$

Доказательство проводим для $f(x)=0$ и $f_n\downarrow 0$. Выберем $\varepsilon>0$.

$$\forall x\ \ \exists n_x:\ \ \text{справедливо}\ \ \ f_{n_x}(x)<\varepsilon\ \ \Rightarrow\ \ f_n(x)<\varepsilon,\ \ n\ge n_x.$$

Все функции непрерывны, поэтому — равномерно непрерывны:

$$f_n\in C\ \Rightarrow\ \ \exists\delta_n:\ \forall\ x\ \forall\ y\in(x-\delta_n,x+\delta_n)\ \ \text{справедливо}\ \ |f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon.$$

Получили покрытие всех точек $x \in [a, b]$ интервалами $(x - \delta_{n_x}, x + \delta_{n_x})$. Выберем из них конечное подпокрытие. Получим конечный набор точек x_i, чисел n_{x_i} и $\delta_{n_{x_i}}$. Пусть $N = \max\{n_{x_i}\}$. Тогда каждое $x \in [a, b]$ принадлежит какому-то i-му интервалу $(x_i - \delta_{n_{x_i}}, x_i + \delta_{n_{x_i}})$ и

$$\forall x \ \text{ справедливо } \ f_N(x) \le f_{n_{x_i}}(x) \le |f_{n_{x_i}}(x) - f_{n_{x_i}}(x_i)| + f_{n_{x_i}}(x_i) \le 2\varepsilon \quad \text{чтд}$$

Контрпримеры к теореме Дини: Оба условия важны.
1) $f \in C$. Иначе монотонная последовательность x^n на $[0, 1]$.
2) Монотонность. Иначе $\sin[x(x/\pi)^n]$ на $[0, \pi]$ — это бегущая волна, прижимается к 1.

Далее мы будем рассматривать случай, когда один из пределов — это верхний предел, стремящийся к бесконечности, то есть несобственный интеграл.

5. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть $y \in Y = [c, d]$, пусть при каждом y функция $f(x, y)$ (как функция переменной x) непрерывна на промежутке $[a, \infty)$. Пусть интеграл

$$\int_a^\infty f(x, y)dx$$

сходится при каждом значении y. Тогда определена функция

$$\Phi(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$$

— это и есть несобственный интеграл, зависящий от параметра. Здесь нижний предел константа, он тоже может зависеть от параметра, но это не важно.

Естественно, будет всё то же самое, если рассматривать интеграл

$$\int_{-\infty}^a f(x, y)dx$$

Пример, когда предельная функция разрывна: $a = 1$, $y \in [0, 1]$, $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x}$, тогда, очевидно, $\Phi(0) = 0$, при $y \in (0, 1]$

$$\int_1^\infty \frac{\sin(xy)}{x} dx = \int_y^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

При $y \to 0$ последний интеграл сходится к пределу, очевидно:

$$\int_y^\infty \frac{\sin x}{x} dx \to \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

то, что это не ноль, легко увидеть из графика функции $\sin x/x$, оказывается

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Вообще, $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(xy)}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} y$. Это называется интеграл Дирихле, позже докажем.

Равномерная сходимость $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx \rightrightarrows \Phi(y)$ несобственного интеграла, зависящего от параметра. Определение.

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ w = w(\varepsilon):\quad \forall\ b > w,\ \ y \in [c,d]\quad \left|\int\limits_a^b f(x,y)dx - \Phi(y)\right| < \varepsilon.$$

Как обычно, равномерность означает, что $w(\varepsilon)$ от y не зависит.

Теорема (Критерий Коши равномерной сходимости).

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ w = w(\varepsilon):\quad \forall\ b_1, b_2 > w,\ \ y \in [c,d]\quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. 1) В одну сторону совсем просто:

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| \le \left|\int\limits_{b_1}^{\infty} f(x,y)dx - \int\limits_{b_2}^{\infty} f(x,y)dx\right| \le \left|\int\limits_{b_1}^{\infty} f(x,y)dx - F(y)\right| + \left|\int\limits_{b_2}^{\infty} f(x,y)dx - F(y)\right|$$

2) В другую сторону: Φ определена из-за обычного критерия Коши, не равномерного

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \Phi(y).$$

Теперь $\Big|\int\limits_{b_1}^\infty f(x,y)dx\Big| \le \varepsilon\ (\forall y, b_1 > w) \quad \Rightarrow \quad \Big|\int\limits_a^{b_1} f(x,y)dx - \Phi(y)\Big| \le \varepsilon.$ чтд

Пример использования признака Коши. $y \in [0,\infty)$

$$G(y) = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+(x-y)^2}$$

Сходится при всех y, но неравномерно. Сходимость очевидна. Неравномерность следует из признака Коши:

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+(x-y)^2} = \operatorname{arctg}(b_1-y) - \operatorname{arctg}(b_2-y)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ (например, .1), по любым b_1, b_2 найдется y такой (например, $(b_1 + b_2)/2$), что это по модулю больше ε.

Теорема (Признак Вейерштрасса, мажорантный). Если $\forall y$ 1) функция $f(x, y)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b] \in [a, \infty)$ и 2) $|f(x, y)| \le g(x)$, причем $\int^{\infty} g(x)dx < \infty$, то несобственный интеграл сходится абсолютно и равномерно.

Признак следует из критерия Коши.

Пример применения признака Вейерштрасса. $y \in [\delta, \infty),\ \delta > 0$,

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^y},$$

Очевидно, интеграл сходится равномерно: $x^{-y} \le x^{-1-\delta}$.

Лекция 4 (24 сентября 2012)

Итак, на прошлой лекции мы

1) Рассмотрели параметрические собственные интегралы (по конечному промежутку от ограниченной функции)

2) Доказали теоремы о непрерывности, интегрируемости, дифференцируемости: в основном перестановочность всего.

3) Рассмотрели параметрические НЕсобственные интегралы по бесконечному промежутку

4) Равномерная сходимость, критерий Коши, критерий Вейерштрасса

Частично повторюсь про равномерные пределы и перестановки пределов, всё непрерывно.

Поточечный и равномерный пределы функции в точке по параметру.

Пусть $f(x, y) : X \times Y \to \mathbb{R}$. Иногда удобно говорить, что это функция двух переменных, а иногда, что это семейство функций $f_y(x) :\ X \to \mathbb{R}$ от переменной x, а переменная y — параметр. Или наоборот, x — параметр, а y — переменная, от которой зависят функции семейства $f_x(y) : Y \to \mathbb{R}$.

Будем считать, что y_0 есть предельная точка множества Y. Все дальнейшие построения и понятия сохраняются с соответствующей интерпретацией этих понятий и свойств для случая, когда y_0 есть бесконечно удаленная точка.

Определение поточечной сходимости (семейства функций по параметру).

$$\exists \quad \lim_{y \to y_0} f(x, y) = g(x), \qquad x \in X.$$

Говорят, что функция (или семейство) f имеет поточечный предел на множестве X по параметру y при $y \to y_0$ (по множеству Y). Функцию g называют поточечным пределом функции (семейства) f на множестве X по параметру y при $y \to y_0$ (по множеству Y).

Определение (Коши) равномерной сходимости (семейства функций по параметру).

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall y : |y - y_0| \leq \delta\ \forall\ \text{ справедливо }\ x \in X : |f(x,y) - g(x)| \leq \varepsilon$$

Эквивалентное определение: $\lim\limits_{y \to y_0} \sup\limits_{x \in X} \{|f(x,y) - g(x)|\} = 0$.

Определение Гейне равномерной сходимости (семейства функций по параметру). Сходимость поточечная:

$$\forall y_n :\ y_n \to y_0,\ \text{последовательность}\ f_n(x) = f(x, y_n) \to g(x)$$

Сходимость равномерная, если $f_n \rightrightarrows g$.

Теорема. Определения Коши и Гейне равномерной сходимости совпадают.

Мы её не будем доказывать в такой формулировке, а только для интегралов и потом.

Признак Коши равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall y, \bar{y} : |y - \bar{y}| \leq \delta\ \forall x \in X\ \text{ справедливо }\ |f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq \varepsilon$$

Теорема. Дано: $f(x,y)$,

$$f(x,y) \rightrightarrows g(x) \text{ при } y \to y_0, \qquad f(x,y) \to h(y) \text{ при } x \to x_0.$$

Тогда существуют 3 предела и они равны:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{y \to y_0} h(y) = \lim_{x \to x_0,\ y \to y_0} f(x,y).$$

В частности: $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$.

Теорема. Равномерный предел непрерывной функции — непрерывная функция.

Теорема. Дано X — промежуток, $f(x,y) \to g(x)$ при $y \to y_0$ поточечно, $\exists\ f'_x(x,y)$, $f'_x(x,y) \rightrightarrows h(x)$ при $y \to y_0$. Тогда $\exists\ g'(x) = h(x)$.

В частности, $\left(\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)\right)'_x = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

Рассуждение про Фихтенгольца. Следующую теорему можно не знать!

Теорема. Дано X — промежуток, $\exists\ x_0\ :\ \ f(x_0,y)\to C,\ |C|<\infty$ при $y\to y_0$; $\exists\ f'_x(x,y)$ и $f'_x(x,y)\rightrightarrows h(x)$ при $y\to y_0$. Тогда $f(x,y)\to g(x)$ и $\exists\ g'(x)=h(x)$. Если X ограниченный промежуток, то $f(x,y)\rightrightarrows g(x)$.

Доказательство.

$$f(x,y)-f(x,\bar y)=f(x,y)-f(x,\bar y)-\big(f(x_0,y)-f(x_0,\bar y)\big)+\big(f(x_0,y)-f(x_0,\bar y)\big)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(x,y)-f(x,\bar y)\Big)_{x=u}(x-x_0)+f(x_0,y)-f(x_0,\bar y)=\qquad(\exists\ u=u(x,y,\bar y))$$

$$=\Big(f'_x(u,y)-f'_x(u,\bar y)\Big)(x-x_0)+f(x_0,y)-f(x_0,\bar y).$$

Теперь всё следует из признаков Коши сходимости и равномерной сходимости.

5.1. Секвенциальная равномерная сходимость (по Гейне) интегралов. Определение. Будем говорить, что несобственный интеграл

$$I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$$

равномерно сходится по Гейне, если $\forall$ монотонной последовательности $A_n\to\infty$ последовательность функций

$$\int\limits_a^{A_n} f(x,y)dx$$

равномерно сходится.

Очевидно, что предел общий для всех последовательностей.

Теорема. Интеграл $I(y)$ равномерно сходится iff он равномерно сходится по Гейне.

Доказательство. 1) Из равномерной сходимости следует равномерная сходимость по Гейне. Очевидно.

2) Из равномерной сходимости по Гейне следует равномерная сходимость. От противного. Пусть

$$\exists\varepsilon_0\ \forall\ A>0\ \exists y:\left|\int\limits_A^\infty f(x,y)dx\right|\geq\varepsilon_0.$$

Выберем последовательность $A_n\to\infty$, по ней построим последовательность y_n такую, что

$$\left|\int\limits_{A_n}^\infty f(x,y_n)dx\right|\geq\varepsilon_0.$$

А мы предположили, что

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon)\ \forall n>N,\ \forall y\in Y\ \text{ справедливо }\ \left|\int\limits_{A_n}^\infty f(x,y)dx\right|<\varepsilon,$$

В частности,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \ \forall n > N \ \text{ справедливо } \ \left|\int\limits_{A_n}^{\infty} f(x, y_n)dx\right| < \varepsilon.$$

Противоречие и чтд

5.2. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости.

Пусть функции f, g определены и непрерывны на $[a, \infty) \times Y$, функция f равномерно ограничена, $\forall y \in Y$ функция $f(x, y)$ монотонная, как функция переменной x.

Абель: $\int\limits_a^{\infty} g(x, y)dx$ равномерно сходится $\Rightarrow$ равномерно сходится $\int\limits_a^{\infty} f(x, y)g(x, y)dx$.

Дирихле: $\int\limits_a^{u} g(x, y)dx$ равномерно по u, y ограничено, $\lim_{x\to\infty} f(x, y) = 0$ равномерно по $y \Rightarrow$ равномерно сходится $\int\limits_a^{\infty} f(x, y)g(x, y)dx$.

Доказательства обоих признаков следуют из второй теоремы о среднем и критерия Коши. Если функция f монотонная при каждом $y \in Y$, как функция от переменной x, то $\exists \xi \in [a, b]$

$$\int\limits_a^b f(x, y)g(x, y)dx = f(a, y)\int\limits_a^{\xi} g(x, y)dx + f(b, y)\int\limits_{\xi}^{b} g(x, y)dx, \qquad \xi = \xi(y).$$

Теорема. $f(x, y) \in C([a, \infty) \times [\alpha, \beta]); \quad \int\limits_a^{\infty} f(x, y)dx \rightrightarrows F(y) \quad \Rightarrow \quad F(y) \in C([\alpha, \beta])$

Доказательство. Сначала разбить $|F(y + \Delta y) - F(y)|$ на 3 части, написать оценку

$$\big|F(y + \Delta y) - F(y)\big| \le \left|F((y + \Delta y) - \int\limits_a^A f(x, y + \Delta y)dx\right| + \left|F((y) - \int\limits_a^A f(x, y)dx\right| +$$
$$+\left|\int\limits_a^A f(x, y + \Delta y)dx - \int\limits_a^A f(x, y)dx\right|$$

Потом выберем число A такое, чтобы 2 первых слагаемых были маленьких, и зафиксируем его. Далее, при этом фиксированном A воспользуемся равномерной непрерывностью функции f на прямоугольнике $[a, A] \times [\alpha, \beta]$ (теоремой Кантора).

Заметим, что последовательность именно такая: равномерной непрерывности на полуполосе может и не быть. Заметим также, что вместо $Y = [\alpha, \beta]$ может быть выбран любой компакт.

Лекция 5 (01 октября 2012)

Итак, на прошлой лекции мы

1) Обсудили тему перестановок пределов в разных видах: предел, ряд, производную, интеграл;

2) Обсудили равномерную сходимость $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$ при $y \to y_0$; сформулировали кучу теорем, в частности сходимость по Гейне; эквивалентность нормальной сходимости и секвенциальной позволяет переходить к последовательностям и обратно.

3) Продолжили рассматривать несобственные параметрические интегралы, доказали признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости;

4) Доказали, что равномерная сходимость интеграла по Коши (это обычная) и по Гейне (это секвенциальная) совпадают;

5) Доказали, что равномерно сходящийся несобственный интеграл сходится к непрерывной функции;

6) Начали переставлять несобственный интеграл с собственным, но не завершили.

5.3. Интегрирование и дифференцирование несобственных интегралов, зависящих от параметра. **Теорема (интегрирование).** Пусть $f(x,y) \in C([a,\infty) \times [\alpha,\beta])$,

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx \rightrightarrows F(y) \quad \text{на } [\alpha,\beta] \quad \Rightarrow \qquad \int\limits_\alpha^\beta F(y)dy = \int\limits_a^\infty \left(\int\limits_\alpha^\beta f(x,y)dy \right) dx$$

Напомнить про равномерную сходимость функциональных последовательностей и Теорему: Если последовательность непрерывных функций равномерно сходится, то предел непрерывен.

Доказательство. Выберем и зафиксируем $w_n \to \infty$. Положим

$$F_n(y) = \int\limits_a^{w_n} f(x,y)dx \rightrightarrows F(y) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_\alpha^\beta F_n(y)dy \to \int\limits_\alpha^\beta F(y)dy.$$

Но $\displaystyle\int\limits_\alpha^\beta F_n(y)dy = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_a^{w_n} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^{w_n} \left(\int\limits_\alpha^\beta f(x,y)dy \right) dx$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{w_n} \left(\int\limits_\alpha^\beta f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_\alpha^\beta F(y)dy \quad \Rightarrow \quad \text{чтд}$$

На последнем шаге использовалось определение по Гейне.

Теорема (дифференцирование). Пусть $f(x,y),\ f'_y(x,y) \in C([a,\infty) \times [\alpha,\beta])$,

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx \to F(y), \quad \int\limits_a^\infty f'_y(x,y)dx \rightrightarrows G(y) \quad \text{на } [\alpha,\beta] \qquad \Rightarrow \qquad \exists F'(y) = G(y).$$

Доказательство. Выберем $w_n \to \infty$, тогда при $n \to \infty$

$$\int\limits_a^{w_n} f'_y(x,y)dx \rightrightarrows G(y) \quad \text{и} \quad \int\limits_a^{w_n} f(x,y)dx \to F(y).$$

По теореме о дифференцировании собственного интеграла: $\exists \left(\int\limits_a^{w_n} f(x,y)dx\right)'_y = \int\limits_a^{w_n} f'_y(x,y)dx$.

По теореме о дифференцировании пределов функциональных последовательностей:

$$\left(\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^{w_n} f(x,y)dx\right)'_y = \lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_a^{w_n} f(x,y)dx\right)'_y = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^{w_n} f'_y(x,y)dx = G(y),$$

следовательно, $\exists F'(y) = G(y)$ чтд

Теорема о перестановке несобственных интегралов. $f \in C([a,\infty)\times[b,\infty)),\ f(x,y) \ge 0$

$$\exists \int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx = G(y) \in C([b,\infty)), \quad \exists \int\limits_b^{\infty} f(x,y)dy = H(x) \in C([a,\infty)), \quad \exists \int\limits_b^{\infty} G(y)dy$$

$$\Rightarrow \qquad \exists \int\limits_a^{\infty} H(x)dx = \int\limits_b^{\infty} G(y)dy, \qquad \text{иными словами:} \qquad \int\limits_a^{\infty} dx \int\limits_b^{\infty} f(x,y)dy = \int\limits_b^{\infty} dy \int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$$

Доказательство. Возьмём $w_n \to \infty,\ v_m \to \infty$, $w_n > a,\ v_m > b$, пусть w_n и v_m монотонны.

$$G_n(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^{w_n} f(x,y)dx \to G(y); \qquad H_m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_b^{v_m} f(x,y)dy \to H(x).$$

По ранее доказанной теореме о перестановке собственных интегралов с параметром:

$$\int\limits_a^{w_n} H_m(x)dx = \int\limits_b^{v_m} G_n(y)dy = f_{n,m}. \qquad \text{Так как } \exists \int\limits_b^{\infty} G(y)dy, \text{ то:}$$

$$f_{n,m} \le \int\limits_b^{v_m} G(y)dy \le \int\limits_b^{\infty} G(y)dy \tag{3}$$

Перейдем к пределу по m в определении $f_{n,m}$:

$$\lim_{m\to\infty} f_{n,m} = \int\limits_a^{w_n} \big(\lim_{m\to\infty} H_m(x)\big)dx = \int\limits_a^{w_n} H(x)dx$$

Теперь
$$\int\limits_a^{w_n} H(x)dx \le \int\limits_b^{\infty} G(y)dy,$$
поэтому эта последовательность ограничена и монотонна, $\Rightarrow$ сходится $\Rightarrow$
$$\exists \int\limits_a^{\infty} H(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_a^{\infty} H(x)dx \le \int\limits_b^{\infty} G(y)dy.$$
Аналогично теперь можно доказать неравенство “в другую сторону” $\Rightarrow$ (3) чтд.

Следствие. Пусть выполнены все условия теоремы для $|f|$, а функция f имеет разные знаки. Тогда справедлив вывод теоремы.

Доказательство. Для функций $f_1 = |f| + f$ и $f_2 = |f| - f$ выполнены условия теоремы, и интегралы переставляются, значит и для $f = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ тоже все верно.

Теорема может быть перефразирована в терминах равномерной сходимости. Если
$$\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx \rightrightarrows G(y) \in C([b,\infty)), \quad \int\limits_b^{\infty} f(x,y)dy \rightrightarrows H(x) \in C([a,\infty))$$
то повторные интегралы сходятся одновременно и $\int\limits_b^{\infty} G(y)dy = \int\limits_a^{\infty} H(x)dx$. В силу теоремы Дини и подхода Гейне это одно и то же! $\boxed{\text{Сказать, что это не } \textbf{теорема Фубини}!}$

Интеграл Дирихле $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(xy)}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} y$ доказательство.

1) Для $y = 0$ очевидно; пусть $y \ne 0$, в силу нечетности достаточно доказать для $y > 0$, замена переменных $t = xy$ приводит к необходимости доказывать только равенство
$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Положим $F(a,m) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(mx)e^{-ax}}{x}dx$, здесь $m \in [0,1]$, $a \in [0,1]$. Очевидно, $F(0,1) = I$.

2) Рассмотрим интеграл $F'_m(a,m) = \int\limits_0^{\infty} \cos(mx)e^{-ax}dx$ при $a > 0$. Пользуемся тем, что интегралы для F и F' мажорируются быстро сходящейся экспонентой и по признаку Вейерштрасса равномерно по m сходятся. Два раза проинтегрируем по частям, внося экспоненту под d, получаем
$$\int\limits_0^{\infty} \cos(mx)e^{-ax}dx = \frac{1}{a} - \frac{m^2}{a^2}\int\limits_0^{\infty} \cos(mx)e^{-ax}dx, \qquad F'_m(a,m) = \frac{a}{m^2 + a^2}.$$

3) $F(a,m) = \operatorname{arctg}\dfrac{m}{a} + C,\ F(a,0) = 0\ \Rightarrow\ C = 0 \Rightarrow\ F(a,m) = \operatorname{arctg}\dfrac{m}{a}$.

4) Положим $m = 1$, получим при $a > 0$

$$G(a) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)e^{-ax}}{x}dx = \operatorname{arctg}\frac{1}{a}.$$

Хочется перейти к пределу при $a = +0$ и всё. Для этого надо показать, что функция $G(a)$ непрерывна при $a \in [0,1]$ в нуле.

Интеграл от 0 до ∞ разбить на 2 части: $[0,1]$ и $[1,\infty)$. Функция $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin(x)e^{-ax}}{x}dx$ непрерывна — это собственный интеграл. Функция $\int\limits_1^\infty \dfrac{\sin(x)e^{-ax}}{x}dx$ равномерно сходится по признаку Дирихле: выражение $\int\limits_1^u \sin(x)dx$ равномерно по a, u ограничено, функция $x^{-1}e^{-ax}$ монотонно убывает по x и равномерно по a стремиться к 0. Поэтому несобственный интеграл для G сходится равномерно, поэтому предельная функция непрерывна. Переходим к пределу в обеих частях равенства, получаем требуемую формулу чтд.

Несколько примеров.

$$\boxed{f(\pi \pm x) = f(x)\ \Rightarrow\ \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}f(x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(x)dx \quad \text{(формула Лобачевского, если } \exists \text{ интеграл слева)}}$$

$$\boxed{\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx = [f(0) - f(\infty)]\ln\frac{b}{a}}$$

интеграл Фруллани

$$\boxed{\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha_0 x)}{x}\prod_{i=1}^n \frac{\sin(\alpha_i x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}\prod_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha_k > 0;\ \alpha_0 > \sum_{i=1}^n \alpha_i.}$$

Лекция 6 (08 октября 2012)

Итак, на прошлой лекции мы

1) Продолжили изучать несобственные параметрические интегралы, признаки равномерной сходимости;

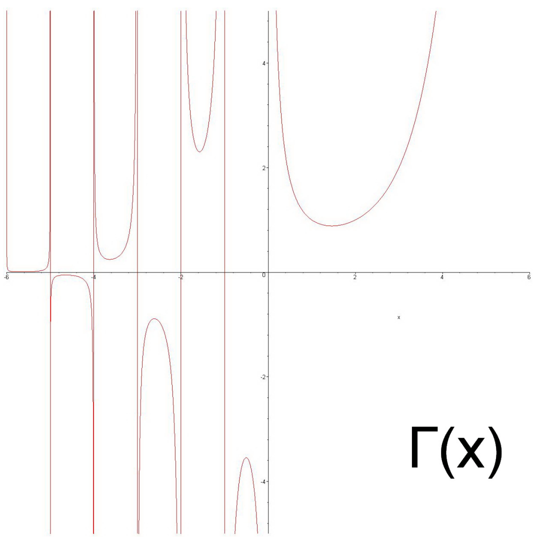
2) Интегрировали и дифференцировали такие интегралы по параметру;

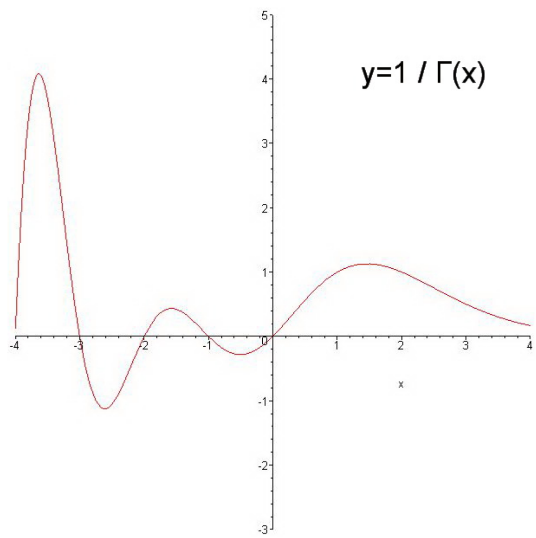
3) Переставляли несобственные интегралы: собственный с несобственным, 2 несобственных;

4) Разобрали подробно интеграл Дирихле и несколько похожих формул.

5) Начали Γ-функцию: нарисовали графики.

Как-то все уже знают, что функцию $f(n) = n!$ можно продолжить на вещественную ось... и даже на комплексную плоскость! Вот картинки графиков естественного продолжения (ГАММА-функция):





5.4. Гамма-функция. Рассмотрим вспомогательные функции

$$\Gamma_n(x) = \frac{(n-1)!n^x}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}, \qquad n = 2, 3, \ldots \quad x = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$$

$$\Gamma_n(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)} \times \frac{n^x}{(n-1)^x} \times \frac{(n-1)^x}{(n-2)^x} \times \ldots \times \frac{2^x}{1^x}$$

$$\frac{n^x}{(n-1)^x} \times \frac{(n-1)^x}{(n-2)^x} \times \ldots \times \frac{2^x}{1^x} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^x = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^x$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)} = \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{x+k} = \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\frac{x+k}{k}}\right) = \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1+\frac{x}{k}}\right)$$

$$x\Gamma_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}$$

Исследуем бесконечное произведение $\Pi = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}$

По теореме с одной из предыдущих лекций оно сходится iff сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} O(\frac{1}{k^2})$$

Таким образом произведение Π сходится абсолютно к некоторой функции $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$ и справедливо её представление в виде бесконечного произведения:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}.$$

Область определения функции $\Gamma(x)$ — множество $\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,-3,\ldots\}$.

Основное функциональное равенство $\boldsymbol{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$. Доказательство.

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \frac{\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x+1)}{\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma_n(x+1)}{\Gamma_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)!n^{x+1}}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+1+k)}}{\frac{(n-1)!n^x}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n+x} = x \qquad \text{чтд.}$$

Равенство $\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n!}$ Очевидно, что $\Gamma_n(1) = 1 \quad\Rightarrow\quad \Gamma(1) = 1,\ \ \Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1,\ \ \Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(2) = 2,\ \ \Gamma(4) = 3\cdot\Gamma(3) = 6,\ \ \ldots\Gamma(n+1) = n!$

5.5. Эйлеровы интегралы.

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} y^{x-1}e^{-y}dy, \qquad x>0 \qquad \text{(Первый интеграл Эйлера)}$$

Доказательство. 1) Докажем, что

$$\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x\int\limits_0^1(1-t)^n t^{x-1}dt \tag{4}$$

Для этого по частям:

$$\int\limits_0^1(1-t)^n t^{x-1}dt = \frac{1}{x}\int\limits_0^1(1-t)^n d(t^x) = \frac{1}{x}(1-t)^n t^x\Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{n}{x}\int\limits_0^1(1-t)^{n-1}t^x dt = \frac{n}{x}\int\limits_0^1(1-t)^{n-1}t^x dt =$$

$$= \frac{n(n-1)}{x(x+1)}\int\limits_0^1(1-t)^{n-2}t^{x+1}dt = \ldots = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\int\limits_0^1 t^{x+n-1}dt = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

Таким образом, (4) доказано.

2) Положим в (4) $t = y/n$:

$$\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x\int\limits_0^1(1-t)^n t^{x-1}dt = (n+1)^x\int\limits_0^n\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\frac{y^{x-1}}{n^x}dy = \left(1+\frac{1}{n}\right)^x\int\limits_0^n\left(1-\frac{y}{n}\right)^n y^{x-1}dy$$

Теперь перейдем к пределу при $n \to \infty$ в последнем равенстве:

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_{n+1}(x) = \Gamma(x), \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n \left(1-\frac{y}{n}\right)^n y^{x-1}dy = \int\limits_0^\infty e^{-y}y^{x-1}dy \qquad \text{чтд.}$$

3) Осталось проследить последний предельный переход: $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^n \left(1-\frac{y}{n}\right)^n y^{x-1}dy = \int\limits_0^\infty e^{-y}y^{x-1}dy.$

Для этого оценим модуль разности $\int\limits_0^n \left(1-\frac{y}{n}\right)^n y^{x-1}dy - \int\limits_0^n e^{-y}y^{x-1}dy + \int\limits_0^n e^{-y}y^{x-1}dy - \int\limits_0^\infty e^{-y}y^{x-1}dy.$

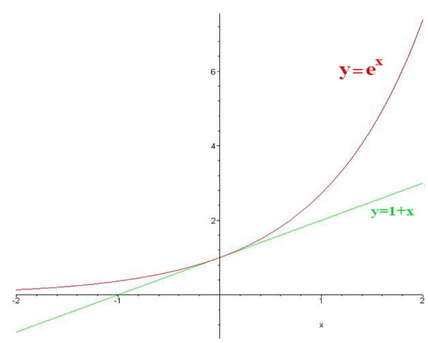
$\left|\int\limits_0^n e^{-y}y^{x-1}dy - \int\limits_0^\infty e^{-y}y^{x-1}dy\right| \to 0$ при $x>0$ (это эквивалентно сходимости несобственного интеграла),

$$\left|\int\limits_0^n \left(1-\frac{y}{n}\right)^n y^{x-1}dy - \int\limits_0^n e^{-y}y^{x-1}dy\right| = \left|\int\limits_0^n \left[\left(1-\frac{y}{n}\right)^n - e^{-y}\right] y^{x-1}dy\right|$$

так как, $\left(1-\frac{y}{n}\right)^n \to e^{-y}$, то $\left|\int\limits_0^1 \left[\left(1-\frac{y}{n}\right)^n - e^{-y}\right] y^{x-1}dy\right| \to 0$, теперь осталось оценить

$$\left|\int\limits_1^n \left[\left(1-\frac{y}{n}\right)^n - e^{-y}\right] y^{x-1}dy\right|, \qquad \text{здесь подинтегральное выражение} \to 0, \text{ промежуток} \to \infty.$$

4) Функция $h(v) = e^v - (1+v)$, $h'(v) = e^v - 1$. У функции h единственная критическая точка $v=0$, $h(0)=0$, это точка минимума, поэтому $e^v \geq 1+v$, одновременно, $e^{-v} \geq 1-v$.



Положим $v = y/n$, $\Rightarrow$ $e^{-y} \geq \left(1-\frac{y}{n}\right)^n$, $e^y \geq \left(1+\frac{y}{n}\right)^n$. Теперь

$$e^{-y} - \left(1-\frac{y}{n}\right)^n = e^{-y}\left(1 - e^y\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right) \leq e^{-y}\left(1-\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right) = e^{-y}\left(1-\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)^n\right),$$

применим неравенство Бернулли: $(1+s)^n \geq 1+ns$ при $s \geq -1$. При $y \leq n \Rightarrow -y^2/n^2 \geq -1$.

$$e^{-y} - \left(1-\frac{y}{n}\right)^n \leq e^{-y}\,\frac{y^2}{n} \quad \Rightarrow \quad \left|\int\limits_1^n \left[\left(1-\frac{y}{n}\right)^n - e^{-y}\right] y^{x-1}dy\right| \leq \frac{1}{n}\left|\int\limits_1^\infty e^{-y}y^{x+1}dy\right| \to 0 \quad \text{чтд}$$

Формула дополнения: при $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ справедливо $\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$

Доказательство. $\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x) \;\Rightarrow\; \Gamma(1-x)\Gamma(x) = -x\Gamma(-x)\Gamma(x) =$

$$= -\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-x}}{1-\frac{x}{k}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{x}}{1+\frac{x}{k}} = -\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\frac{x}{k})(1-\frac{x}{k})} =$$

$$= -\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}} = \frac{\pi}{\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Интеграл Эйлера-Пуассона $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$ Положим $x^2 = t,\; dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dx = \Gamma(\frac{1}{2})$$

По формуле дополнения $\Gamma(\dfrac{1}{2})\Gamma(\dfrac{1}{2}) = \pi$ чтд

Формула удвоения Лежандра: $\boxed{2^{2a-1}\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2a).}$

Следует из формулы умножения *Гаусса*

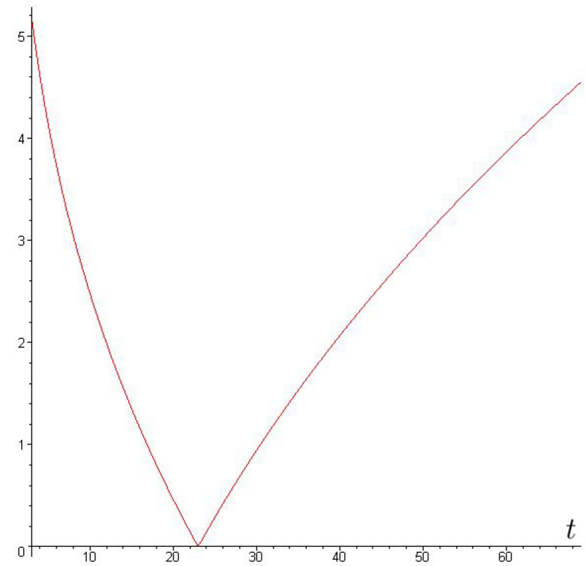
$$\Gamma(a+\frac{1}{m})\Gamma(a+\frac{2}{m})\ldots\Gamma(a+\frac{m-1}{m}) = (2\pi)^{(m-1)/2}m^{-ma+1/2}\Gamma(ma).$$

5.6. Бета-функция. $B(\alpha,\beta) = \int\limits_{0}^{1} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \quad \alpha,\beta > 0$

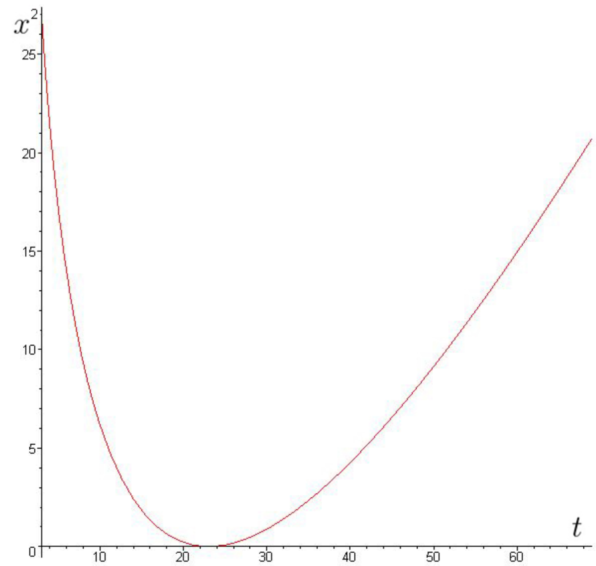
Свойства: $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha), \quad B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Симметричность следует из замены $t := 1-t$. Докажем связь с Γ–функцией.

1) Замена $t = 1/(1+x),\; 1-t = x/(1+x),\; dt = -t^2dx \Rightarrow B(\alpha,\beta) = \int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx$

2) $\Gamma(u) = \int\limits_{0}^{\infty} y^{u-1}e^{-y}dy$, пусть $y = (x+1)z$, где x — параметр, а z — новая переменная, тогда $\Gamma(u) = \int\limits_{0}^{\infty}(x+1)^u z^{u-1}e^{-(x+1)z}dz$. Эта формула справедлива при всех $x > 0$.



$x = \sqrt{-(n - t + n\ln t - n\ln n)},\ n = 23$



$x^2 = -(n - t + n\ln t - n\ln n),\ n = 23$

3) $B(\alpha,\beta)\cdot\Gamma(\alpha+\beta) =$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\Gamma(\alpha+\beta)dx = \int\limits_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\left(\int\limits_0^\infty (x+1)^{\alpha+\beta} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(x+1)z} dz\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty x^{\beta-1}\left(\int\limits_0^\infty z^{\alpha+\beta-1} e^{-(x+1)z} dz\right) dx = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty x^{\beta-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(x+1)z} dx\right) dz =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1}\left(\int\limits_0^\infty x^{\beta-1} z^{\beta} e^{-xz} dx\right) dz = \int\limits_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1}\left(\int\limits_0^\infty (xz)^{\beta-1} e^{-(xz)} d(xz)\right) dz = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \quad \text{чтд}$$

Пример. Вычислим (замена $t = \sin^2 x,\ x = \arcsin\sqrt{t},\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}$)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^a x \cos^b x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{(a-1)/2}(1-t)^{(b-1)/2} dt = \frac{1}{2}B(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{b+1}{2})}{2\Gamma(\frac{a+b}{2}+1)}$$

Формула Стирлинга $\quad n! = (\dfrac{n}{e})^n(\sqrt{2\pi n} + \alpha), \qquad |\alpha| < 2.$

1) $n! = \Gamma(n+1) = \int\limits_0^\infty t^n e^{-t} dt = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_0^\infty \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{n-t} dt = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_0^\infty e^{n-t+n\ln t - n\ln n} dt$

2) У подинтегральной функции $t^n e^{-t}$ один максимум в точке $t = n$, проверяется прямым дифференцированием, $f(n) = (n/e)^n$, это значит, что $n - t + n\ln t - n\ln n \le 0$.

3) Делаем замену: $-x^2 = n - t + n\ln t - n\ln n$,

$$x^2 = t - n + n\ln t - n\ln n = t - n - n\ln t + n\ln n = t - n - n\ln\left(1 + \frac{t-n}{n}\right)$$

4) Так как по формуле Тейлора $f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{1}{2}f''(\theta z)z^2$, то $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2}\dfrac{1}{(1+\theta z)^2}$, при каждом z при некотором $|\theta| < 1$.

5) Теперь $t - n - n\ln\left(1 + \dfrac{t-n}{n}\right) = t - n - n\left(\dfrac{t-n}{n} - \dfrac{(t-n)^2}{2n^2}\dfrac{1}{\left(1+\theta\frac{t-n}{n}\right)^2}\right) = \dfrac{n(t-n)^2}{2\big(n+\theta(t-n)\big)^2}$

то есть $x^2 = \dfrac{n(t-n)^2}{2\big(n+\theta(t-n)\big)^2} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{(t-n)\sqrt{\frac{n}{2}}}{n+\theta(t-n)}$

6) $\Rightarrow\ t - n = \dfrac{xn}{\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta x}\ \Rightarrow\ t = \dfrac{n\sqrt{\frac{n}{2}} + nx(1-\theta)}{\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta x}$

7) $2xdx = -dt + \dfrac{n}{t}dt\ \Rightarrow\ dt = \dfrac{2xt\,dx}{t-n} = 2\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}} + x(1+\theta)\right)dx$

8) Теперь в самом деле подставим вместо t переменную x:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n\int\limits_0^\infty e^{n-t+n\ln t-n\ln n}dt = 2\left(\frac{n}{e}\right)^n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left(\sqrt{\frac{n}{2}} + x(1+\theta)\right)dx = 2\sqrt{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx +$$

$$+2\left(\frac{n}{e}\right)^n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(1-\theta)x\,dx = \left(\frac{n}{e}\right)^n(\sqrt{2n\pi} + 2r_n), \quad r_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(1-\theta)x\,dx$$

Обсудить, почему интеграл получился от $-\infty$ до $+\infty$!

9) $0 \le 1-\theta \le 2 \qquad \Rightarrow \quad r = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}(1-\theta)x\,dx, \qquad \ell = -\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}(1-\theta)x\,dx.$

$$|r_n| = \max\{r,\ell\} - \min\{r,\ell\} \le 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}x\,dx = \int\limits_0^\infty e^{-u}\,du = 1.$$

Более точная формула: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\left(1 + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{1}{288n^2} - \dfrac{139}{51840n^3} - \dfrac{571}{2488320n^4} + \dots\right)$.

Подведение итогов, завершение темы. Несобственные интегралы, признаки сходимости; Главные значения; Бесконечные произведения, признаки сходимости; Собственные интегралы, зависящие от параметра; Несобственные интегралы, зависящие от параметра; Равномерная сходимость; Перестановка всяческих пределов; интегрирование, дифференцирование интегралов, зависящих от параметра Интеграл Дирихле, функции Эйлера (гамма и бета), формула Стирлинга

Замечания.

Я не рассказывал: про линейность сходмости несобственных интегралов, про линейность равномерной сходимости. Я не говорил ничего о том, как приближенно вычислять несобственные интегралы. Мапль, Математика и Матлаб знают всё!

Литература

1. Подольский В.Е. Лекции по математическому анализу. http://dmvn.mexmat.net/calculus.php

2. Фихтенгольц Г.М. Курс математического анализа. Том 2. Главы 13 и 14. Разделы, написанные мелким шрифтом.