Алгебра. 1 курс. Листок 3.

Исправлена формулировка задачи 3.6д.

Для получения максимального балла за этот листок достаточно сдать любые 10 задач со звездочкой.

$\diamond$ **3.1.** *Докажите, что если p — простое число, то кольцо $\mathbb{Z}_{p^n}$ нельзя представить в виде прямого произведения каких-нибудь колец.*

$\diamond$ **3.2.** *Сколько попарно неизоморфных колец здесь выписано:*
$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$*?*

$\diamond$ **3.3. *** *Докажите, что любое кольцо вида $\mathbb{Z}_{n_1}\times\mathbb{Z}_{n_2}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{n_k}$ изоморфно некоторому кольцу вида $\mathbb{Z}_{m_1}\times\mathbb{Z}_{m_2}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{m_l}$, где числа $m_1, m_2, \ldots, m_l$ таковы, что каждое следующее является делителем предыдущего, т.е. $m_{i+1}\mid m_i$, $i=1,2,\ldots,l-1$, и что такое представление для данного кольца единственно.*

$\diamond$ **3.4.** *а) Докажите, что кольцо всех непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ нельзя представить в виде прямого произведения колец.*
б) Представьте кольцо всех непрерывных функций из $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ в $\mathbb{R}$ в виде прямого произведения колец.

$\diamond$ **3.5.** *Докажите, что множество S всех последовательностей $\{a_n\}$ действительных чисел, имеющих предел, образует кольцо относительно операций сложения и умножения. Опишите идемпотентные последовательности. Докажите, что $S\cong\mathbb{R}^m\times S$ для любого m.*

$\diamond$ **3.6.** *а) Придумайте функцию $f:\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_4$, которая не задается многочленом.*
**б) Тот же вопрос для любого $\mathbb{Z}_n$ при составном n.*
в) Покажите, что в кольце многочленов $\mathbb{Z}_4[t]$ имеется бесконечно много обратимых элементов.
**г) Пусть R — произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Докажите, что если многочлен из кольца $R[t]$ нильпотентен, то все его коэффициенты нильпотентны.*
**д) Пусть R — произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Докажите, что если многочлен из кольца $R[t]$ идемпотентен, то он имеет нулевую степень.*

$\diamond$ **3.7.** *а)Докажите, что множество действительных чисел вида $a+b\sqrt{2}$, $a,b\in\mathbb{Z}$ является подкольцом в $\mathbb{R}$, а множество чисел вида $a+b\sqrt{2}$, $a,b\in\mathbb{Q}$, является его полем частных.*
б) Является ли множество действительных чисел вида $a+b\sqrt[3]{2}$, $a,b\in\mathbb{Z}$, подкольцом в $\mathbb{R}$? Как описать наименьшее подкольцо в $\mathbb{R}$, содержащее все такие числа?
в)Опишите поле частных кольца из предыдущего пункта.
г) Опишите наименьшее подкольцо в $\mathbb{R}$, содержащее $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, и его поле частных.
**д) Найдите все подполя поля из предыдущего пункта.*

$\diamond$ **3.8.** *Рассмотрим евклидову плоскость и зафиксируем на ней единичный отрезок. Множество E будет состоять из длин всех отрезков, которые можно построить циркулем и линейкой, нуля и всех противоположных им чисел.*
а) Докажите, что E является подполем в $\mathbb{R}$.
б) Докажите, что если $x\in E$, $x>0$, то $\sqrt{x}\in E$.
**в) Докажите, что $E\neq\mathbb{R}$.*

$\diamond$ **3.9.** *Дайте определение характеристики поля и докажите, что если $\operatorname{char}\mathbb{K}=0$, то $\mathbb{K}$ содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Q}$, а если $\operatorname{char}\mathbb{K}=p$, то $\mathbb{K}$ содержит подполе, изоморфное $\mathbb{F}_p$.*
б) Докажите, что если a и b — элементы поля характеристики $p>0$, то $(a+b)^p=a^p+b^p$.

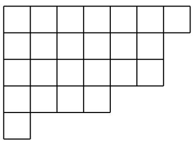
$\diamond$ **3.10.** *Докажите следующие тождества:*
а)$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$.
б)$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^nC_n^n=0$.
в)$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots+C_n^{2[\frac{n}{2}]}=2^{n-1}$.
г)$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=n2^{n-1}$.

д)$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$.
е) $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots + C_{n-[\frac{n}{2}]}^{[\frac{n}{2}]} = f_n$ *— n-ое число Фиббоначи. ([x] это целая часть числа x.)*
**ж)* $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

◇ **3.11.** ***** *При каких значениях* n *число* C_n^k *нечетно при всех* k $(0 \le k \le n)$*?*

◇ **3.12.** *а) Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение* $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$*? (m, n натуральные числа.)*
б) А сколько это уравнение имеет решений в натуральных числах?
в) Сколько существует одночленов степени n от m переменных?

Диаграммой Юнга называется фигурка, ограниченная северной и западной сторонами нарисованного по линиям клетчатой бумаги прямоугольника и какой-нибудь проведенной по линиям клетчатой бумаги кратчайшей ломаной, соединяющей юго-западную вершину этого прямоугольника с северо-восточной.



Это диаграмма Юнга, имеющая 5 строк и 7 столбцов.

◇ **3.13.** *а) Сколько существует различных диаграмм Юнга, имеющих из не более чем n строк и не более чем m столбцов?*
а) Сколько существует различных диаграмм Юнга, имеющих ровно n строк и ровно m столбцов?

◇ **3.14.** *1) Докажите формулу "тринома":* $(a+b+c)^n = \sum\limits_{k+l+m=n} \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} a^k b^l c^m$. *(Сколько слагаемых стоит в правой части?)*
**2) Придумайте и докажите обобщение этой формулы на произвольное (конечное) число слагаемых.*

◇ **3.15.** ***** *Докажите, что многочлен* $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$ *делится нацело на многочлен* $x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x + 1$ *тогда и только тогда, когда* $n+1$ *делится нацело на* $k+1$.

◇ **3.16.** *Найдите остаток от деления многочлена* $x^{11111} + x^{321} + 1$
а) на $x^2 - 1$*;* *б) на* $x^2 + 1$*;* *в) на* $x^2 - x + 1$.

В задачах 3.17 - 3.21 нужно вычислить ответ в кольце формальных степенных рядов $\mathbb{R}[x]$, т.е. получить ответ в виде $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ и объяснить, как найти a_n.

◇ **3.17.** *а)* $\frac{1}{10x+1}$*;* *б)* $\frac{1}{2+x}$*;* *в)* $\frac{1}{2x^2-3x+1}$.

◇ **3.18.** $\frac{1}{1-x-x^2}$. *Как называется последовательность коэффициентов этого ряда?*

◇ **3.19.** *а)* $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots)$*;*
б) $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots)^2$*;* *в)* $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots)^n$*;*
г) $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots)^2$*;* *д)* $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots)^n$*;*

$$е)\ \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots}.$$

◇ **3.20.** $2(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots)(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots)$.

◇ **3.21.** ***** $\left[1 - 2x - \left(\frac{1}{2!}2^2x^2 + \frac{1\cdot3}{3!}2^3x^3 + \frac{1\cdot3\cdot5}{4!}2^4x^4 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{5!}2^5x^5 + \ldots\right)\right]^2$.

◇ **3.22.** ***** *Докажите, что ряд* $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{3!} \ldots$ *нельзя представить в виде отношения двух многочленов.*

◇ **3.23.** *Придумайте ряд из* $\mathbb{F}_2[[x]]$*, который нельзя представить в виде отношения двух многочленов из* $\mathbb{F}_2[x]$.