

ЛИСТОК 4. Г- и В-ФУНКЦИИ И ИХ q -АНАЛОГИ

АНАЛИЗ, 2 КУРС, 09.10.2012

4♦1 Вычислите интегралы, указав, при каких значениях параметров они существуют:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^0) \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^3} dx; \quad \mathbf{б}^0) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^3}; \quad \mathbf{в}^0) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(a+bx^\beta)^\gamma} \quad (a, b, \beta > 0); \quad \mathbf{г}^0) \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx; \\ \mathbf{д)} \int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} x dx; \quad \mathbf{е)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x dx; \quad \mathbf{ж)} \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x dx. \end{aligned}$$

4♦2 а) Докажите, что $\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-xy} dy$ при $s > 0$.

б) Докажите, что $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^\alpha} dx = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha) \cos(\pi\alpha/2)}$ при $0 < \alpha < 1$.

в) Докажите, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\beta} dx = \frac{\pi b^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta) \sin(\pi\beta/2)}$ при $0 < \beta < 2$.

Указание: для решения (б) и (в) пригодится (а).

г) Вычислите интегралы Френеля $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ и $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$.

4♦3 а) Докажите, что $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$, где γ — некоторая константа (называемая постоянной Эйлера).

Указание: перенесите $\ln n$ в левую часть, обозначьте новую левую часть через a_n и докажите сходимость ряда $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$.

б) Докажите, что $1/2 < \gamma < 1$.

в) Докажите, что $\gamma = -\Gamma'(1)$.

г) Докажите, что $\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{x/k}}{1 + \frac{x}{k}}$ для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

4♦4 а) Докажите, что $(\ln \Gamma(x))'' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$ для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

б) Вычислите $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4♦5 Докажите, что $\Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ для всех $x > 1$ (где $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ — дзета-функция Римана).

4♦6 Длина параметрически заданной плоской кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, класса C^1 вычисляется по формуле $\ell = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$. Найдите длину эллипса $2x^2 + y^2 = 1$ (точнее, выразите ее через значения В-функции в некоторых точках).

Следующие задачи — необязательные; решившие их получают бонусные баллы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для $q \neq 1$ определим q -производную функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}.$$

Очевидно, если f дифференцируема, то $\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = f'(x)$.

4♦7 а) Докажите, что $D_q(fg) = D_q(f)g + \alpha_q(f)D_q(g)$, где $\alpha_q(f)(x) = f(qx)$.

б) Докажите, что $D_q((x-a)_q^n) = [n](x-a)_q^{n-1}$ ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для $q \in (0, 1)$ определим q -интеграл функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) d_q x &= a(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} f(aq^k) q^k; \\ \int_a^b f(x) d_q x &= \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x. \end{aligned} \quad (1)$$

Обратите внимание, что ряд (1) заведомо сходится, если f ограничена на $[0, a]$.

4♦8 Докажите, что если f непрерывна, то

$$\lim_{q \rightarrow 1} \int_a^b f(x) d_q x = \int_a^b f(x) dx.$$

4♦9 Для непрерывной функции f докажите q -формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b D_q f(t) d_q t = f(b) - f(a).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для $q \in (0, 1)$ положим $[\infty] = (1-q)^{-1}$ (ср. определение 1 из листка 2) и определим q - Γ -функцию формулой

$$\Gamma_q(z) = \int_0^{[\infty]} t^{z-1} E_q(-(1-q)qt) d_q t,$$

где E_q — q -экспонента из листка 2.

4♦10 Для каждого $a \in \mathbb{R}$ положим $(1-t)_q^a = \frac{(1-t)_q^\infty}{(1-q^a t)_q^\infty}$ (если $a \in \mathbb{N}$, то это обозначение согласуется со введенным ранее в листке 2). Докажите, что

$$\Gamma_q(z) = \frac{(q; q)_\infty}{(1-q)^{z-1}(q^z; q)_\infty} = \frac{(1-q)_q^{z-1}}{(1-q)^{z-1}}.$$

4♦11* Докажите, что $\lim_{q \rightarrow 1} \Gamma_q(z) = \Gamma(z)$ для всех $z \neq 0, -1, -2, \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для $q \in (0, 1)$ определим q -В-функцию формулой

$$B_q(a, b) = \int_0^1 t^{b-1} (1-qt)_q^{a-1} d_q t \quad (b > 0).$$

4♦12 Докажите, что $B_q(a, b) = \frac{\Gamma_q(a)\Gamma_q(b)}{\Gamma_q(a+b)}$.