

Коммутант. Силоские подгруппы. Разрешимые группы.

Правила игры. Для получения максимальной оценки за листок достаточно решить 80% задач без звёздочек.

- ◇ **3.1.** Найдите коммутант группы диэдра D_n .
 - ◇ **3.2.** Докажите разрешимость групп: **а)** S_4 ; **б)** Q_8 ; **в)** D_n .
 - ◇ **3.3.** Найдите все силоские 2-подгруппы и 3-подгруппы в группах: **а)** S_3 ; **б)** A_4 .
 - ◇ **3.4.** Докажите, что всякая силоская 2-подгруппа в группе S_4 изоморфна группе диэдра D_4 .
 - ◇ **3.5.** Найдите число силоских p -подгрупп в группе A_5 , если p равно: **а)** 2; **б)** 3; **в)** 5.
 - ◇ **3.6.** Докажите, что силоская 2-подгруппа в $SL_2(\mathbb{F}_3)$: **а)** изоморфна группе Q_8 ; **б)** нормальна в $SL_2(\mathbb{F}_3)$.
 - ◇ **3.7.** Верно ли, что образ силоской p -подгруппы конечной группы при сюръективном гомоморфизме $G \rightarrow H$ является силоской подгруппой в H ?
 - ◇ **3.8.** Докажите, что любая силоская p -подгруппа прямого произведения $A \times B$ является произведением силоских p -подгрупп в A и в B .
 - ◇ **3.9.** Докажите, что всякая группа порядка: **а)** 15; **б)** 35; **в)** 185; **г)** 255 коммутативна.
 - ◇ **3.10.** Докажите, что не существует простых групп порядка: **а)** 36; **б)** 80; **в)** 196.
 - ◇ **3.11.** Пусть P — силоская p -подгруппа конечной группы G , H — нормальная подгруппа.
 - а)** Докажите, что $P \cap H$ является силоской подгруппой в H .
 - б)** Приведите пример, показывающий, что без предположения о нормальности подгруппы H это утверждение неверно.
 - ◇ **3.12.** Опишите все силоские подгруппы в $GL_n(\mathbb{F}_p)$.
 - ◇ **3.13.** Докажите, что:
 - а)** всякая подгруппа разрешимой группы разрешима;
 - б)** всякая факторгруппа разрешимой группы разрешима;
 - в)** если A, B — разрешимые группы, то $A \times B$ разрешима;
 - г)** если $G/A \cong B$ и A, B разрешимы, то G разрешима.
 - ◇ **3.14.** Докажите разрешимость группы порядка pq , где p и q — различные простые числа.
- Имеет место более сильное утверждение (*теорема Бернсайда*), которое мы докажем позже: всякая группа порядка $p^n q^m$ разрешима.
- ◇ **3.15.** Докажите разрешимость группы порядка: **а)** 20; **б)** 12; **в)** $p^2 q$; **г)** 42; **д)** 100; **е*)** $n < 60$.
 - ◇ **3.16*.** Пусть p, q, r — различные простые числа.
 - а)** Докажите, что любая группа порядка pqr разрешима.
 - б)** Докажите, что всякая неразрешимая группа порядка $p^2 qr$ изоморфна A_5 .
 - ◇ **3.17*.** Пусть G — конечная группа, $G = G'$, $Z(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и $G/Z(G) \cong A_5$. Докажите, что $G \cong SL_2(\mathbb{F}_5)$.