Темы курсовых работ
2012-2013 учебный год

Кириченко Валентина Алексеевна

1. (для 1-2 курсов) Многогранники Ньютона и теорема Кушниренко.

   Классическая теорема Безу о числе общих нулей n многочленов от n комплексных переменных верна для многочленов общего положения, и выражает число нулей через степени многочленов. Теорема Кушниренко обобщает теорему Безу, и выражает число нулей через многогранники Ньютона ("обобщенные степени") многочленов.
   Литература:

   - Многогранники и уравнения В.А.Тиморин, А.Г.Хованский // Математическое просвещение. Сер. 3, 2010. вып. 14. С. 30–57
2. (для 1-3 курсов) Многочлены Шуберта.

   По каждой перестановке n элементов можно определить многочлен от n переменных с целыми коэффициентами (многочлен Шуберта). Многочлены Шуберта изначально возникли для описания исчисления Шуберта на многообразии полных флагов в n-мерном пространстве (обобщении грассманиана), а затем стали активно изучаться комбинаторными методами. Тема для 1-2 курса — теорема Кириллова-Фомина, дающая комбинаторное описание мономов в многочлене Шуберта через приведенные диаграммы (pipe-dreams), реализуюшие данную перестановку. Тема для самостоятельного обдумывания - доказательство теоремы Кириллова-Фомина через митоз. Тема для 3 курса - теорема Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда и Демазюра о представлении циклов Шуберта на многообразии полных флагов многочленами Шуберта).

   Литература:

   - L. Manivel // Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci. SMF/AMS Texts and Monographs 6, 2001; (имеется неопубликованный русский перевод)
     Очень хорошо написанная книга о комбинаторике и геометрии многообразий флагов, в частности, в главе 2 содержится теорема Кириллова-Фомина с доказательством
   - A. Kirillov, S. Fomin // The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials, Discrete Mathematics, 153 (1996), 123-143
   - Ezra Miller // Mitosis recursion for coefficients of Schubert polynomials, J. Comb. Theory A, 103 (2003), no. 2, 223-235
     Элементарный комбинаторный алгоритм (митоз) для выписывания всех приведенных диаграмм с данной перестановкой индукцией по длине перестановки. Также может быть использован для доказательства теоремы Кириллова-Фомина
   -
3. (для 2 курса) Цепная дробь для числа e (основания натурального логарифма).
   Интересно, что коэффициенты цепной дроби для e подчиняются простой закономерности.
   Литература:

- А.Я.Хинчин // Цепные дроби
- статья в Википедии Gauss's continued fraction

4. (для 2-3 курсов) Группа монодромии гипергеометрической функции Гаусса.

   Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1(a, b, c; z)$- специальная функция одной комплексной переменной. Может быть задана как сумма (гипергеометрического) ряда, как интеграл или как решение фуксова дифференциального уравнения второго порядка с тремя особыми точками. Группу монодромии гипергеометрической функции можно найти явно (например, задать образующими и соотношениями), в частности, можно узнать при каких значениях комплексных параметров a,b,c она разрешима, коммутативна или конечна. Литература: (все необходимые определения и методы для решения задачи можно найти в этих книгах, но самого решения в них нет)

   - А.А.Болибрух // Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения
   - В.И.Смирнов // Курс высшей математики (том 3, часть 2), 7-е издание, глава 5, пп 95-104
   - Г.Бейтмен, А.Эрдейи // Высшие трансцендентные функции (том 1), глава 2, пп 2.1-2.7

5. (для 3-го курса) Сколько коник (на комплексной проективной плоскости) касается пяти данных коник ?

   Классическая задача исчислительной геометрии, поставленная Штейнером и решенная Шалем. Имеет важное историческое значение, так как поиски строгого решения стимулировали развитие разных областей алгебраической геометрии. Литература:

   - Ф. Гриффитс, Дж. Харрис // Принципы алгебраической геометрии (том 2), глава 6, п 1
     Содержит как строгое решение методами алгебраической геометрии, так и неформальное элементарное решение методом Шаля.
   - S.Kleiman // Chasles's enumerative theory of conics: A historical introduction, Studies in Algebraic Geometry, Mathematical Association of America Studies in Mathematics, 20, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1980, 117–138 (имеется электронная версия)
     Интересный исторический очерк о задаче Шаля и ее влиянии на развитие теории пересечений.

6. (для 3-4 курсов и магистратуры) Исчисление Шуберта.

   Сколько прямых в трёхмерном пространстве пересекает четыре данные? Сколько прямых в R^4 пересекат 6 данных плоскостей? На эти и многие другие вопросы отвечает исчисление Шуберта. Исчисление Шуберта на грассманниане изучено лучше всего. Следующий по простоте случай - двушаговые многообразия флагов. Существует много разных способов вычислять произведения циклов Шуберта на грассманниане (так называемые правила Литтльвуда-Ричардсона). Некоторые из них обобщаются на двушаговые многообразия флагов. Вопрос об универсальном правиле Литтльвуда-Ричардсона для всех многообразий флагов (например, для многообразия полных флагов) пока открыт. В качестве темы предлагается выбрать

одно из правил Литтльвуда-Ричардсона (см. ниже), разобрать его и попытаться обобщить.
Литература:

- L. Manivel // Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci. SMF/AMS Texts and Monographs 6, 2001; (имеется неопубликованный русский перевод)
  Очень хорошо написанная книга о комбинаторике и геометрии многообразий флагов, в частности, в главе 1 - классическое правило Литтльвуда-Ричардсона, в главе 3 - основы исчисления Шуберта на многообразии полных флагов.
- Ravi Vakil // A geometric Littlewood--Richardson rule
  Геометрический способ умножать циклы Шуберта: пересечение многообразий Шуберта последовательно вырождается в объединение многообразий Шуберта. Известно обобщение на двушаговые многообразия флагов, но оно использует очень сложную комбинаторику.
- Allen Knutson, Terence Tao, Christopher Woodward // The honeycomb model of GL(n) tensor products II: Puzzles determine facets of the Littlewood-Richardson cone
  Симметричное правило Литтльвуда--Ричардсона через паззлы. В приложении к статье Вакила (см. выше) обсуждается его связь с геометрическим правилом. Недавно было анонсировано обобщение паззлов на двушаговые многообразия флагов
- В.А.Кириченко, Е.Ю.Смирнов, В.А.Тиморин Исчисление Шуберта и многогранники Гельфанда-Цетлина
  Исчисление Шуберта на многообразии полных флагов моделируется через пересечение граней в многогранниках. Тем самым можно пытаться использовать комбинаторику многогранников для построения правила Литтльвуда-Ричардсона на многообразии полных флагов.

7. (для 3-4 курсов и магистратуры) Многогранники Гельфанда—Цетлина

   Многогранники Гельфанда--Цетлина впервые появились в теории представлений, затем использовались в алгебраической геометрии. Их можно определить элементарно с помощью простых неравенств. Про их комбинаторику почти ничего неизвестно. Например, число вершин вычислено только в самых простых случаях.
   Литература:

   - Pavel Gusev, Valentina Kiritchenko, Vladlen Timorin // Number of vertices in Gelfand-Zetlin polytopes
     Посчитано число вершин в частных случаях, найдено уравнение на производящую функцию числа вершин в общем случае. Сформулированы открытые задачи.