Забродин Антон Владимирович

Темы курсовых работ 2012/2013 учебный год

<u>1-2 курс</u>:

Интеграл Сельберга и бета-ансамбли.

Вывести явные формулы для статистических сумм бета-ансамблей N частиц на прямой и на окружности. Есть ли еще точно решаемые модели такого рода? Какие можно предложить обобщения?

Литература: The importance of the Selberg integral Peter J. Forrester, S. Ole Warnaar, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 45 (2008) 489-534, arXiv:0710.3981.

<u>2-3 курс</u>:

Мера на многообразии комплексных матриц.

Мера (форма объема) на многообразии квадратных матриц с произвольными комплексными элементами факторизуется в произведение двух множителей, один из которых зависит только от собственных значений, а второй - от остальных ("угловых") координат на могоообразии матриц. Предлагается вывести этот факт из первых принципов и найти явный вид фактора, зависящего от собственных значений, а также исследовать вопрос о том, какие матричные интегралы (т.е. интегралы по многообразию матриц) допускают явное вычисление.

Литература: M.Mehta, Random matrices (перевод: М.Мета, Случайные матрицы, МЦНМО, 2012).

<u>2-4 курс</u>:

Алгебра псевдодифференциальных операторов.

Псевдодифференциальные операторы - это некоммутативные аналоги рядов Лорана, так же как обыкновенные дифференциальные операторы можно считать некоммутативными аналогами полиномов. Техника псевдодифференциальных операторов существенно используются в теории солитонных уравнений, таких, как, например, уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) и Кадомцева-Петвиашвили (КП). Предлагается изучить свойства этой алгебры, и особенно те, которые обусловлены некоммутативностью. Неформальная сверхзадача - по возможности углубить аналогию с обычными рядами Лорана (от одной переменной). В качестве дальнейшего обобщения можно рассмотреть псевдодифференциальные операторы с некоммутативными (например, матричными) коэффициентами.

Литература: И.Гельфанд, Л.Дикий, Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега-де Фриза, УМН 30:5 (1975) 67-100.

<u>3-4 курс</u>:

Операторы Штурма-Лиувилля с частично алгебраическим спектром (квазиточнорешаемые задачи).

Существует класс операторов Штурма-Лиувилля на прямой, допускающих явное нахождение некоторого количества собственных функций и собственных значений путем решения алгебраических уравнений. Они связаны с конечномерными представлениями алгебры sl(2) в пространстве полиномов. Задача: описать этот класс явно, привести и детально разобрать примеры. Дополнительные темы для исследования: а) можно ли предложить обобщения на операторы в большем числе измерений, б) какие возможны обобщения на разностные уравнения и с какими алгебрами они связаны?

Литература: A.Turbiner, Quasi-Exactly Solvable Problems and sl(2) Algebra, Commun. Math. Phys. 118 (1988) 467-474;

M.Shifman, New Findings in Quantum Mechanics (Partial Algebraization of the Spectral Problem), Int. J. Mod. Phys. A 126 (1989) 2897-2952;

P.Wiegmann and A.Zabrodin, Algebraization of difference eigenvalue equations related to U_q(sl_2), Nucl. Phys. B 451 (1995) 699-724.

3-4 курс:

Обратная задача теории потенциала.

Предмет теории потенциала - гравитационные или электрические поля, создаваемые телами. Их потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа вне тела и уравнению Пуассона внутри его. Обратная задача состоит в определении формы тела по создаваемому им полю или, что то же самое, по набору величин, которые называются гармоническими моментами тела. Это большая и сложная область со множеством интересных приложений, имеющая глубокие связи с фундаментальными вопросами математической физики. Так, в двух измерениях обратная задача теории потенциала тесно связана с теорией интегрируемых систем. Возможные темы для самостоятельного изучения/исследования:

а) известные результаты о существовании и единственности решения и их доказательства,

б) явные примеры, когда решение не единственно,

в) соотношения взаимности для гармонических моментов в двух и трех измерениях,

г) "игрушечный" (но поучительный) пример: обратная задача теории потенциала в одном измерении и ее связь с интегрируемыми системами.

Литература: А.Варченко, П.Этингоф, Почему граница круглой капли превращается в инверсный образ эллипса, Наука, 1995 и ссылки там; А.Забродин, Бездисперсионный предел уравнения Хироты в некоторых задачах комплексного анализа, ТМФ 129 (2001) 239-257.