Темы курсовых работ
на 2012-2013 учебный год
профессор Т.Такебе

1 курс	**1. Вычисление пи** Пи = 3,14... - все знают, но почему? Огромное количество попыток вычислять пи сделано и в древние времена (например, Архимед получил оценку 3+10/71<pi<3+1/7), и сейчас. (В 2011 году A. J. Yee и Shigeru Kondo рассчитали последовательность из десяти триллионов десятичных разрядов.) *Задача*: Самостоятельно вычислить пи, пользуясь разными методами. (По крайней мере, методом Архимеда; формулой Leibniz-а (если можно, с улучшением сходимости); формулой Machin-а; методом арифметико-геометрического среднего. Есть еще много других методов.) *Обязательно* - доказать использованные формулы (для математиков, это важнее чем вычисления); - оценить погрешность, т.е., обосновать, сколько из рассчитанных цифр точно, НЕ сравнивая с известными результатами. Рекомендую вычислить сначала руками, т.е., не используя компьютера. Литература: сами найдете. Много информации и богатый список литературы находятся в интернете. Например: http://ru.wikipedia.org/wiki/Pi
1-2 курс	**1. Ортогональные многочлены.** В линейном пространстве многочленов R[x] (и в C[x]) можно определять разные скалярные произведения с помощью интеграла. Ортогональные многочлены - естественные ортонормированные базисы этого пространства и имеют интересные свойства. *Пример задач*: Вывод формулы Christoffel-Darboux и её приложение Литература: Gabor Szego "Orthogonal Polynomials" Ch. II & III (with examples in Ch. IV & V) или русский перевод этой книги. (Интеграл Лебега использован, но не существен для нас.) Полиа, Сеге «Задачи и теоремы из анализа» Например, Отдел Шестой.
1-3 курс	**1. Эллиптические интегралы и эллиптические функции** Эллиптический интеграл – определённый или неопределенный интеграл функции R(t, P(t)), где R(t,x) – рациональная функция двух переменных, P(t) – квадратный корень из 3 или 4 степени с несовпадающими корнями. В общем случае, эллиптический интеграл не может быть выражен в элементарных функциях. Но такой интеграл и обратная функция неопределённого интеграла (эллиптическая функция) появляются в разных проблемах математики и физики. Например: длина эллипса, длина графиков тригонометрических функций, движение маятника, форма скакалки, форма волны… *Пример задач*: - приложения и классификация эллиптических интегралов, (**для 1-2 курса**) - дифференциальные уравнения для эллиптических функций и их приложения, (**для 2-3 курса**) - формулы сложения эллиптических функций (разные доказательства

	известны; с помощью теории функций комплексной переменной, с помощью дифференциальных уравнений, геометрическое доказательство Якоби с помощью движения маятника, …) ***(для 3 курса)*** Литература: сами найдете. **2. Комбинаторика (плоские разбиения, непересекающиеся пути) и линейная алгебра** Плоские разбиение – трёхмерное обобщение диаграмм Юнга. Число плоских разбиений в определённом ящике является равным с число непересекающихся путей на некотором графе. А число непересекающихся путей на графе вычисляется определителем и функциями Шура. *Примеры задач*: - Доказательство формулы Макмагона (Macmahon formula) ***(для 1-2 курса***) - Вычисление симметрических плоских разбиений с помощью формулы ЛГВ ***(для 1-2 курса)*** - Интерпретация результата Окунькова-Решетихина-Вафы с этой точки зрения ***(высшая проблема)*** Литература: D. M. Bressoud, Proofs and Confirmations, Cambridge University Press A. Okounkov, N. Reshetikhin, C. Vafa, Quantum Calabi-Yau and Classical Crystals, in “The Unity of Mathematics” ed. P. Etingof, V. Retakh, I. M. Singer, Birkhauser K. Takasaki, Linear algebra and enumeration, в японском журнале «Sugaku-seminar» («Семинар по математике», журнал похожий на «Квант»); Такебе сейчас переводит этот текст на русский язык.
2-3 курс	**1. Солитоны** Физические законы часто описываются уравнениями на функции и их производные. (Пример: закон Ньютона в механике.) Такие уравнения на функции называются «дифференциальными уравнениями». Известно, что частные дифференциальные уравнения, которые являются нелинейными по неизвестной функции, вообще очень трудно решать. Но специальные уравнения (уравнение КдФ, уравнение КП, …) можно решить забавными вычислениями рядов дифференциальных операторов. *Примеры задач*: - явная формула для 2-солитоного решения (u(t,x) = ...) КдФа; явная формула тау-функции находится в книге. - явная формула для N-солитоного решения КдФа. - "Visualization" таких решений. Например посмотрите http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/soliton-lab/gallery/solitons/index-e.html - вывод уравнения Буссинеска (Boussinesq equation) из иерархии КП - 1,2,...N-солитоные решения Бусинеска: тау - почти такая же как КдФ. А u(t,x)? Visualization? - разные явные решения КдФа, Буссинеска, КП, ... (примеры: алгебро-геометрическое решение Кричевера; решение, тау-функция которого является функцией Шура; ...) Литература: Т. Мива, М. Джимбо, Э. Датэ «Солитоны» гл. 1, 2, 3. ***(для 2 курса)*** Дальше. гл. 4-6: решения дифференциальных уравнений с помощью алгебры Клиффорда. ***(для 3 курса)*** (Теория функции комплексной переменной немного использована, но можно обходить.) **2. Уравнение Панлеве**

	Сто лет назад П. Панлеве и его ученик Б. Гамбие классифицировали обыкновенные дифференциальные уравнение второго порядка и нашли шесть специальных уравнений, которые сегодня называются «уравнениями Пенлеве» (Painleve equations). Раньше они считались «изолированной математикой». Но после обнаружений физиков в 1970-ых годах оказалось, что такие уравнения связаны с разными областями математики (например: алгебраическая геометрия поверхностей, группа Вейля (Weyl group), интегрируемые системи,…). *Примеры задач*: - явное описание действие группы Вейля на тау-функцию - особые решения рационального/гипергеометрического типа Литература: M. Noumi, Painlevé equations through symmetry, Translations of Mathematical Monographs 223, American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-3221-9
3 курс	**1. Уравнение Лёвнера** Теорема Римана утверждает, что на каждой односвязной области D существует голоморфная функция f(z), которая является однозначным соответствием между D и единичным диском. Если D деформируется по параметру t некоторым образом, то f(z) зависит от t и удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, которое называется уравнением Лёвнера (Loewner equation). *Примеры задач*: - Доказательство уравнения Лёвнера - Доказательство уравнения Лёвнера хордового типа (chordal Loewner equation) - Доказательство гипотеза Бибербаха (Bieberbach conjecture) (высшая проблема) Литература: P. L. Duren, Univalent Functions, Grundlehren der mathematicschen Wissenschaften 259, Springer Verlag