Темы курсовых работ на 2012–2013 учебный год

доц. А. Ю. Пирковский

1) ***От спектрального радиуса к основной теореме алгебры*** (для 1–2 курса бакалавриата).
   «Основная теорема алгебры» утверждает, что всякий отличный от константы многочлен над полем комплексных чисел имеет корень. Имеется много различных доказательств этой теоремы, опирающихся на методы из разных областей математики (алгебры, комплексного анализа, топологии...). Предлагается разобрать статью Е. А. Горина (Матем. просв., сер. 3, 1997, вып. 1, 71–84), в которой дается интересное доказательство этой теоремы, основанное на методах спектральной теории нормированных алгебр (знать которую для понимания статьи совершенно не нужно). Необходимо восполнить все детали, пропущенные в статье!

2) ***Пример кольца главных идеалов, не являющегося евклидовым*** (для 1–2 курса бакалавриата).
   Литература: J. C. Wilson, *A principal ideal ring that is not a Euclidean ring*, Mathematics Magazine, vol. 46, no. 1 (1973), 34–38; K. S. Williams, *Note on non-Euclidean principal ideal domains*, Mathematics Magazine, vol. 48, no. 3 (1975), 176–177.

   Евклидово кольцо — это такое коммутативное целостное кольцо, в котором, грубо говоря, «можно делить с остатком» (например, кольцо целых чисел или многочленов от одной переменной). Легко проверяется, что всякое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов (т.е. каждый идеал в нем порожден одним элементом). Однако привести пример кольца главных идеалов, не являющегося евклидовым, уже не так просто. Предлагается разобрать первую половину первой статьи, в которой строится некое кольцо и доказывается, что оно — кольцо главных идеалов, а потом разобрать вторую статью, в которой доказывается, что это кольцо не является евклидовым (неевклидовость доказана и в первой статье, но более сложным способом).

3) ***Характеризация многочленов через обнуление производных*** (для 1–2 курса бакалавриата).
   Ясно, что у любого многочлена все производные, начиная с некоторой, тождественно равны нулю. Требуется доказать обратное утверждение: если бесконечно дифференцируемая функция на прямой такова, что для каждой точки $t \in \mathbb{R}$ существует такое n, что n-ая производная функции в точке t равна нулю, то функция — многочлен. Для решения задачи полезно ознакомиться с теоремой Бэра и понятием множества первой категории.
   Литература: Дж. Окстоби, Мера и категория. М.: Мир, 1974.

4) ***Конечномерные операторные алгебры*** (для 1–2 курса бакалавриата).
   Под операторными алгебрами обычно понимают ассоциативные алгебры, состоящие из линейных операторов в банаховых (чаще всего — гильбертовых) пространствах. Принято считать, что эти алгебры и пространства, в которых они действуют, как правило, бесконечномерны. Однако никто не запрещает рассматривать операторные алгебры и в конечномерных векторных пространствах. Разумеется, многие понятия и теоремы из этой науки в конечномерном случае становятся существенно проще. Однако это не

значит, что они становятся тривиальными. Предлагается разобраться в некоторых понятиях, связанных с конечномерными операторными алгебрами, и решить ряд задач на эту тему. Для этого вполне достаточно знаний по линейной алгебре в объеме первого курса. Разные задачи по этой теме могут стать предметами разных курсовых работ.
Литература: И. М. Глазман, Ю. И. Любич, Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969; M. Shubin, Von Neumann algebras and L^2-techniques in geometry and topology (глава 1).

5) ***Функции от коммутирующих операторов*** (для 1–2 курса бакалавриата).
Пусть $f \in \mathbb{C}[t]$ — многочлен от одной переменной и T — линейный оператор в векторном пространстве X над полем $\mathbb{C}$. Если в многочлен f вместо независимой переменной подставить оператор T, то получится оператор $f(T)$. Аналогичная конструкция имеет смысл, когда f — многочлен от нескольких переменных, а $T = (T_1, \dots, T_n)$ — набор коммутирующих между собой линейных операторов. А какие еще функции, кроме многочленов, можно применять к оператору или к набору коммутирующих операторов? Ответ зависит от того, как устроены эти операторы. Предлагается разобраться в этом вопросе для случая, когда векторное пространство X конечномерно. Для решения этой задачи достаточно обычной линейной алгебры.
Литература: А. Ю. Пирковский, Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов (глава 1). М.: МЦНМО, 2010.

6) ***Совместный спектр Тэйлора*** (для 3–4 курса бакалавриата).
Эта тема связана с предыдущей, но требует несколько большего багажа знаний. Пусть f — голоморфная функция n переменных и $T = (T_1, \dots, T_n)$ — набор коммутирующих между собой линейных операторов в банаховом пространстве X. Можно ли придать разумный смысл выражению $f(T_1, \dots, T_n)$? Чтобы ответить на этот вопрос, Дж. Тэйлор в начале 1970-х гг. придумал весьма содержательное, хотя и несколько неожиданное определение совместного спектра набора операторов, основанное на некоторых понятиях гомологической алгебры. Предлагается разобраться в основах тэйлоровской теории и вычислить совместный спектр в ряде конкретных случаев. Вариант задачи, доступный и второкурсникам: доказать, что в конечномерном случае спектр Тэйлора совпадает с множеством совместных собственных значений набора операторов.
Литература: R. E. Curto, *Taylor joint spectrum*. Preprint (2002).

7) ***Вычисление границ Шилова функциональных алгебр*** (для 2–4 курса бакалавриата).
Пусть A — подалгебра в алгебре всех непрерывных функций на компакте X. Подмножество в X называется *границей* для A, если для любой функции из A максимум ее модуля достигается на этом подмножестве. *Граница Шилова* алгебры A — это наименьшая замкнутая граница в X. Например, граница Шилова алгебры $C(X)$ всех непрерывных функций на X — это весь компакт X. Если же X — замкнутый круг на комплексной плоскости, а алгебра A состоит из функций, непрерывных на X и голоморфных внутри X, то граница Шилова алгебры A — это окружность ∂X (это следует из принципа максимума модуля). Предлагается найти границу Шилова для нескольких конкретных функциональных алгебр. Возможно дальнейшее развитие этой темы — нахождение других границ, например, границы Шоке, нахождение точек пика и т.п.
Литература: И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца. М.: Государственное издательство физико-математической литературы,

1960; М. А. Наймарк, Нормированные кольца. М.: Наука, 1968; Т. Гамелин, Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.

8) ***Расстояние Банаха–Мазура и его операторный аналог*** (для 2–4 курса бакалавриата).
Хорошо известно, что на конечномерном векторном пространстве любые две нормы эквивалентны, т.е. задают одну и ту же топологию. Иначе говоря, любые два конечномерных нормированных пространства одинаковой размерности топологически изоморфны (т.е. между ними существует биективное линейное отображение, являющееся гомеоморфизмом). Однако ситуация меняется, если вместо топологических изоморфизмов рассматривать изометрические. На множестве классов изометрического изоморфизма n-мерных нормированных пространств можно ввести метрику — так называемое *расстояние Банаха–Мазура*, относительно которого это множество является компактным метрическим пространством. Вычислить, или даже хотя бы оценить, расстояние Банаха–Мазура между конкретными пространствами — задача содержательная и далеко не всегда простая. Ситуация становится еще интереснее, если вместо нормированных пространств рассматривать так называемые *операторные пространства* — нормированные пространства, снабженные некоторой дополнительной структурой. В этом случае пространство, аналогичное пространству Банаха–Мазура, компактным уже не будет, а интересных примеров становится еще больше. Предлагается разобраться в этой тематике и вычислить расстояние Банаха–Мазура в ряде конкретных ситуаций.
Литература: P. Wojtaszczyk, Banach spaces for analysts, Cambridge, 1991; G. Pisier, An introduction to operator space theory, Cambridge, 2003.

9) ***Тензорные произведения функциональных пространств*** (для 3–4 курса бакалавриата).
В функциональном анализе, в отличие от алгебры, нет единственной канонической конструкции тензорного произведения. Если, скажем, E и F — нормированные пространства, то на их алгебраическом тензорном произведении $E \otimes F$ существует целая серия естественных, но не эквивалентных другу норм. Среди таких норм есть наибольшая (называемая *проективной*) и наименьшая (называемая *инъективной*). Аналогичные конструкции имеют смысл и для более общих топологических векторных пространств. Проективная норма «хорошо себя ведет» в применении к пространствам типа $L^1(X, \mu)$ (где (X, μ) — пространство с мерой), а инъективная — в применении к пространствам типа $C(X)$ (где X — компакт), но не наоборот. Есть только один — впрочем, весьма важный — класс топологических векторных пространств, для которого проективное и инъективное тензорные произведения совпадают. Этот класс состоит из *ядерных* пространств, к которым относятся, в частности, многие пространства гладких и голоморфных функций. Предлагается разобраться в основных понятиях этой теории и описать тензорные произведения некоторых функциональных пространств в явном виде.
Литература: R. A. Ryan, Introduction to tensor products of Banach spaces, Springer, 2002; А. Я. Хелемский, Гомология в банаховых и топологических алгебрах, М.: МГУ, 1986.

10) ***Оператор левого сдвига не является обобщенным скалярным*** (для 3–4 курса бакалавриата).
Ограниченный линейный оператор T в комплексном банаховом пространстве X называется *обобщенным скалярным*, если он допускает так называемое *гладкое функциональное исчисление*, т.е. непрерывный гомоморфизм из алгебры гладких функций $C^\infty(\mathbb{C})$ в

алгебру ограниченных операторов $\mathscr{B}(X)$, переводящий координатную функцию z в оператор T. Обобщенных скалярных операторов много; таковы, например, все нормальные операторы в гильбертовом пространстве. По-видимому, самый простой пример оператора, не являющегося обобщенным скалярным, — это оператор левого сдвига в пространстве ℓ^2. Этот факт хорошо известен, однако, по-видимому, единственное известное его доказательство является следствием весьма мощной и непростой теории, развитой в целой серии работ различных авторов. Интересно было бы попытаться выяснить, так ли уж необходимо «стрелять из пушки по воробьям», и попробовать придумать более или менее элементарное доказательство этого факта.
Литература: А. Ю. Пирковский, Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. М.: МЦНМО, 2010; K. B. Laursen, M. M. Neumann, An introduction to local spectral theory. Oxford, Clarendon Press, 2000.

11) ***Некоторые алгебры гладких функций и их гомологические свойства*** (для 1 курса магистратуры).
В теории обобщенных функций и различных ее приложениях важную роль играют пространства так называемых «основных» функций, т.е. гладких функций на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих определенным условиям убывания на бесконечности; см. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, «Пространства основных и обобщенных функций», Москва, 1958. Некоторые из этих пространств (например, пространство $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ финитных функций и пространство Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) являются топологическими алгебрами относительно поточечного умножения. Более общие алгебры Гельфанда–Шилова изучались в двух неопубликованных работах Д. А. Чумичёва (2005–2007 гг.). Предлагается продолжить эти исследования и, например, вычислить глобальные гомологические размерности каких-либо из этих алгебр. Для алгебр $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ это было сделано О. С. Огневой и А. Я. Хелемским в 1984 г. (Матем. заметки, 1984, 35:2, 177–187).

12) ***Описание оболочек Аренса–Майкла конечно порожденных алгебр*** (для 3-4 курса бакалавриата или 1 курса магистратуры).
Оболочка Аренса–Майкла комплексной алгебры A — это ее пополнение относительно семейства всех субмультипликативных полунорм. Базовый пример: оболочка Аренса–Майкла алгебры многочленов — это алгебра целых функций. Более общим образом, оболочка Аренса–Майкла алгебры регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии — это алгебра голоморфных функций на том же многообразии. Этот пример наводит на мысль о том, что оболочки Аренса–Майкла могут представлять интерес с точки зрения «некоммутативной комплексно-аналитической геометрии». Поэтому естественная и интересная задача — взять какую-нибудь стандартную некоммутативную алгебру и получить явное описание ее оболочки Аренса–Майкла. Для некоторых алгебр это было сделано в статье А. Ю. Пирковского «Оболочки Аренса–Майкла, гомологические эпиморфизмы и относительно квазисвободные алгебры» (Труды ММО, т. 69 (2008), 34–125). Однако для ряда важных алгебр оболочка Аренса–Майкла пока не вычислена. Среди них — квантовая обертывающая алгебра $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ и двойственная к ней «квантовая алгебра функций» $\mathcal{O}_q(SL_2)$ (см., например, К. Кассель, «Квантовые группы», М.: Фазис, 1999).

Вот, вероятно, более простая задача на ту же тему. Дж. Тэйлор показал, что для любой полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ оболочка Аренса–Майкла ее универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ изоморфна прямому произведению счетного семейства матричных алгебр (где размеры матриц равны размерностям неприводимых представлений $\mathfrak{g}$). Доказательство Тэйлора существенно опирается на теорию представлений групп Ли, в т.ч. на теорему Петера–Вейля. Интересно было бы придумать «прямое» доказательство, хотя бы для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.